PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN

Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

Séries numériques

Devoir Maison n°1

Partie I
Convergence des séries par transformation d'Abel

On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

1. **a)** Pour tout entier $k \geq 1$, déterminer b_k en fonction de B_k et B_{k-1}.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$, (on remarque que $B_0 = b_0$).

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})$ converge.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Partie II
Applications aux convergences de quelques types de séries

1. Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

2. Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et α un réel.

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

b) Montrer que, pour tout $\alpha \leq 0$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est divergente.

c) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, les séries $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont convergentes.

d) Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, les séries $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont absolument convergentes.

e) On suppose que $0 < \alpha \leq 1$.

i) Vérifier que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\cos(2n\theta)}{n^\alpha}$ est convergente.

ii) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente.

iii) En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ n'est pas absolument convergente.

3. Soit (c_n) une suite de nombres complexes telles que la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ est convergente. Montrer que, pour tout réel α positif, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ est convergente.

Partie III
Une autre méthode pour montrer la convergence de quelques types de séries

Dans cette partie, nous considérons une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, positive et décroissante. Pour tout réel strictement positif s, on pose,

$$\varphi_f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

1. Montrer que la fonction φ_f est bien définie sur $\mathbb{R}^{*+}$, (on rappelle que $\mathbb{R}^{*+}$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs).

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, par $g(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, déterminer φ_g.

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $s \in \mathbb{R}^{*+}$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$e^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} e^{-st} f(t)dt \leq e^{-ks} f(k)$$

4. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{R}^{*+}$,

$$\int_0^N e^{-st} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{N} e^{-ks} f(k) \leq \int_0^N e^{-st} f(t)dt + f(0)$$

5. En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{R}^{*+}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-ns} f(n)$ converge.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{R}^{*+}$, $\int_{n+1}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-ks} f(k) \leq \int_n^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$.

7. **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(s, s') \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$,

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{1+e^{ts'}} dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-ks}}{1+e^{ks'}} \leq \int_n^{+\infty} \frac{e^{-st}}{1+e^{ts'}} dt.$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{R}^{*+}$,

$$\frac{1}{s}\left(e^{-(n+1)s} - \ln(1+e^{-(n+1)s})\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-ks}}{1+e^{ks}} \leq \frac{1}{s}\left(e^{-ns} - \ln(1+e^{-ns})\right).$$

c) Déterminer $\lim\limits_{s\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-ks}}{1+e^{ks}}$.

d) Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-ks}}{1+e^{ks}}$, quand s tend vers $0+$.

8. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, positive et croissante.

a) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-s^2 t} f(e^{-t})dt$ converge.

b) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}^*$, $0 \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-s^2 k} f(e^{-k}) - \int_0^{+\infty} e^{-s^2 t} f(e^{-t})dt \leq f(1)$.

Corrigé

Partie I
Convergence des séries par transformation d'Abel

1. **(a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $B_k = \sum_{j=0}^{n} bj = \sum_{j=0}^{n-1} bj + b_k = B_{k-1} + b_k$, donc $b_k = B_k - B_{k-1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= a_0 b_0 + a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= a_0 b_0 + a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j \quad \text{on a effectué le changement d'indice } j = k-1 \\
&= a_n B_n + a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \quad \text{car } B_0 = b_0 \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.
\end{aligned}$$

2. **(a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_0$, donc [2] la série $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0$.

1. Ce corrigé est proposé par Adham Elbekkali, professeur de mathématiques de la classe PCSI 2 au CPGE de Tanger

2. Définition : Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que la série $\sum u_n$ est convergente, si la suite (S_n) des sommes partielles, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

est convergente. Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(b) Pour monter que la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ est convergente, alors, par définition de la convergence d'une série, il suffit qu'on montre que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente. Or, d'après la question **I.1.b**, on a

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_n = a_nB_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k,$$

alors il suffit qu'on montre que les suites (a_nB_n) et $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right)$ sont convergentes.

On a

- On a $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la suite (B_n) est bornée, donc $a_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ainsi la suite (a_nB_n) est convergente.
- La suite (B_n) est bornée, donc $B_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$, par suite $(a_n-a_{n+1})B_n \underset{n\to+\infty}{=} O(a_n-a_{n+1})$ et comme la série $\sum_{n\geq 0}(a_n-a_{n+1})$ est convergente d'après **I.2.b**, alors la série $\sum_{n\geq 0}(a_n-a_{n+1})B_n$ est aussi convergente, du coup la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right)$ est convergente.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ est convergente.

Partie II
Applications aux convergences de quelques types de séries

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $b_n=(-1)^n$ et $B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}\in\{0,1\}$, du coup la suite (B_n) est bornée, et comme la suite (a_n) est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum_{n\geq 0} a_nb_n=\sum_{n\geq 0}(-1)^na_n$ est convergente.

2. **(a)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a θ est différent de $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, donc $\mathrm{e}^{i\theta}$ est différent de 1 puis

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}=\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k=\mathrm{e}^{i\theta}\times\frac{1-\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{i\theta}\times\frac{1-\mathrm{e}^{in\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}\theta}\times\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

(b) Soit $\alpha\leq 0$, on a $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right|=\dfrac{1}{n^\alpha}\not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, dès lors la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

(c) Soit $\alpha>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $a_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$, $b_n=\mathrm{e}^{in\theta}$ et $B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$. D'après la question **I.2.a**, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |B_n|=\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}\right|=\left|\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}\theta}\times\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|},$$

donc la suite (B_n) est bornée, et comme la suite (a_n) est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum_{n\geq 1} a_nB_n=\sum_{n\geq 1}\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente. Il en résulte que les séries $\sum_{n\geq 1}\mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right)=\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1}\mathrm{Im}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right)=\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont aussi convergentes.

(d) Soit $\alpha > 1$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

et, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, alors les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right|$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}\right|$ sont convergentes et par suite les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont absolument convergentes.

(e) (i) On a θ est différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), donc 2θ est aussi différent de $2k\pi$ et, comme $\alpha > 0$, alors, d'après la question **II.2.c**, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n2\theta)}{n^\alpha}$ est convergente.

(ii) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha} = \frac{1-\cos(2n\theta)}{2n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos(2n\theta)}{2n^\alpha},$$

la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente ($\alpha < 1$) et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(2n\theta)}{n^\alpha}$ est convergente d'après la question précédente, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|\sin(n\theta)| \geq \sin^2(n\theta)$, donc $\frac{|\sin(n\theta)|}{n^\alpha} \geq \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ et, comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente d'après la question précédente, alors la série $\sum\limits_{n\leq 1} \frac{|\sin(n\theta)|}{n^\alpha}$ est aussi divergente, ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ n'est pas absolument convergente.

3. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ étant convergente, donc la suite des sommes partielles $(B_n)_{n\geq 1}$ est convergente et par conséquent elle est bornée et, comme la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n c_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ est convergente.

Partie III
Une autre méthode pour montrer la convergence de quelques types de séries

1. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction $t \longmapsto e^{-st} f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ est impropres en $+\infty$.
La fonction f est décroissante et minorée (car elle positive), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$, du coup $t^2 e^{-st} f(t) = \frac{e^{-st} f(t)}{1/t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et par suite $e^{-st} f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente, alors $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ est convergente. Ainsi $\varphi_f(s)$ est bien définie pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction g est définie, continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc, d'après la question précédente, φ_g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi_g(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-st} g(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-st}(1-t)\mathrm{d}t$$
$$\overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}(1-t)}{s}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}{s} = \frac{1}{s} - \left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}(\mathrm{e}^{-s}-1).$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Les fonctions f et $t \longmapsto \mathrm{e}^{-st}$ sont décroissantes, donc

$$\forall t \in [k, k+1],\ \ f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-(k+1)s} \leq \mathrm{e}^{-ts} \leq \mathrm{e}^{-ks},$$

d'où

$$\forall t \in [k, k+1],\ \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \mathrm{e}^{-ts} f(t) \leq \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

alors , par croissance de l'intégrale, obtient

$$\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ks} f(k)\,\mathrm{d}t,$$

c.à.d.

$$\mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ks} f(k).$$

4. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la question précédente, on a

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!],\ \ \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k).$$

En effectuant le changement d'indice $j = k+1$ dans l'expression du premier membre de l'inégalité précédente et en appliquent la relation de Chasles dans l'expression du deuxième membre de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-js} f(j) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

c.à.d.

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

c.à.d.

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

et, comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) - f(0)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ks} f(k) + \mathrm{e}^{-Ns} f(N) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k)$, il vient

$$\sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) - f(0) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

par conséquent

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t + f(0),$$

et on voit que l'inégalité est encore valable pour $N = 0$. Finalement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t + f(0).$$

5. La série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-ns} f(n)$ est à termes positifs, donc [3], pour montrer qu'elle est convergente, il suffit qu'on montre que la suite de ses sommes partielles est majorée. D'après la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_0^n \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t + f(0) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t + f(0),$$

donc la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-ns} f(n)$ est majorée et par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-ns} f(n)$ est convergente.

6. Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $n, N \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leq N$. D'après la question **III.3**, on a

$$\forall k \in [\![n, N]\!], \quad \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

donc

$$\sum_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-(k+1)s} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k).$$

En effectuant le changement d'indice $j = k + 1$ dans l'expression du premier membre de l'inégalité précédente et en appliquent la relation de Chasles dans l'expression du deuxième membre de l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{j=n+1}^{N+1} \mathrm{e}^{-js} f(j) \leq \int_n^{N+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

c.à.d.

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{N+1} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-ks} f(k).$$

En faisant tendre $N \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

c.à.d.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

---

3. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \iff \text{la suite de ses sommes partielles est majorée} \iff \exists M \geq 0 \;:\; \forall n \in \mathbb{N},\; \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k),$$

ainsi

$$\int_{n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

7. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(s, s') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{ts'}}.$$

On voit que la fonction f est continue, positive et décroissante, donc, d'après la question précédente, on a

$$\int_{n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks} f(k) \leq \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

c.à.d.

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts'}}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks'}} \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts'}}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $s' = s$ dans la question précédente, on obtient

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts}}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts}}\,\mathrm{d}t.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts}}\,\mathrm{d}t &= \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{\mathrm{e}^{ts}(\mathrm{e}^{-ts}+1)}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-ts}\right)^2}{\mathrm{e}^{-ts}+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-ts}\right)^2 + \mathrm{e}^{-ts} - \mathrm{e}^{-ts}}{\mathrm{e}^{-ts}+1}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts} - \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{\mathrm{e}^{-ts}+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ts}}{s} + \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{-ts})}{s}\right]_{t=n}^{t\to+\infty} = \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right)
\end{aligned}$$

et en remplaçant n par $n+1$, on obtient $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ts}}{1+\mathrm{e}^{ts}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right)$.
D'où la double inégalité

$$\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \leq \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right).$$

(c) D'après la question précédente, on a

$$\forall s > 0, \quad \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \leq \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right)$$

et, comme $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right) = 0$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} = 0$.

(d) D'après la question **III.7.b**, on a

$$\forall s > 0, \quad \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \leq \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right),$$

donc

$$\forall s > 0, \quad \left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) \leq s\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \leq \left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right),$$

et, comme $\lim\limits_{s\to 0^+}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)s} - \ln(1+\mathrm{e}^{-(n+1)s})\right) = \lim\limits_{s\to 0^+}\left(\mathrm{e}^{-ns} - \ln(1+\mathrm{e}^{-ns})\right) = 1-\ln 2$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{s\to 0^+} s\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} = 1-\ln 2$, d'où $s\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \underset{s\to 0^+}{\sim} 1-\ln 2$ et par suite

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ks}}{1+\mathrm{e}^{ks}} \underset{s\to 0^+}{\sim} \frac{1-\ln 2}{s}.$$

8. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g(t) = f(e^{-t}).$$

- La fonction f est positive, donc la fonction g est aussi positive.
- La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc, par composition, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} t \leq t' &\Longrightarrow -t' \leq t \\ &\Longrightarrow \mathrm{e}^{-t'} \leq \mathrm{e}^{-t} \quad \text{car la fonction exp est croissante} \\ &\Longrightarrow f(\mathrm{e}^{-t'}) \leq f(\mathrm{e}^{-t}), \quad \text{car la fonction } f \text{ est croissante} \end{aligned}$$

donc la fonction g est décroissante.

(a) Soit $s \in \mathbb{R}^*$. Puisque la fonction g est continue, positive, décroissante et $s^2 \in \mathbb{R}_+^*$, alors, d'après la question **III.1**, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2 t} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2 t} f(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$ converge.

(b) Soit $s \in \mathbb{R}^*$. Puisque la fonction g est continue, positive, décroissante et $s^2 \in \mathbb{R}_+^*$, alors, d'après la question **III.4**, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^N \mathrm{e}^{-ts^2} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ks^2} g(k) \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-ts^2} g(t)\,\mathrm{d}t + g(0).$$

En faisant tendre $N \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts^2} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks^2} g(k) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts^2} g(t)\,\mathrm{d}t + g(0),$$

c.à.d.

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts^2} f(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks^2} f(\mathrm{e}^{-k}) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts^2} f(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t + f(1),$$

par conséquent

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks^2} f(\mathrm{e}^{-k}) - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts^2} f(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \leq f(1).$$