PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN
Prépas MP

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
تَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

Suites et Séries de fonctions

Devoir Maison N°1 : CCP 2023

PROBLÈME

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Q10. Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q11. <u>1re tentative</u>

Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $f_n(x)=(-1)^n\, x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q12. 2[e] tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x) \, dx.$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q13. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

Q14. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

PROBLÈME

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est <u>continue</u> et <u>positive</u> sur $]0,1]$ ainsi que sur $[1,+\infty[$

En 0, on a $\varphi(t) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}x$ est intégrable car $1-\alpha<1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $]0,1]$.

En $+\infty$, on a $\varphi(t) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x$ est intégrable car $2-\alpha>1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Q10. On a successivement :

$$I(1-\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

on effectue le changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$

$$\begin{aligned}
I(1-\alpha) &= \int_{+\infty}^1 \frac{u^{\alpha}}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)\\
&= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u\\
&= J(\alpha)
\end{aligned}$$

Q11. Pour x fixé dans $]0,1[$, $f_n(x)$ est le terme général d'une série géométrique et $|f_n(x))<1$, la série est donc convergente :

On a donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$

supposons que la série converge uniformément sur $]0,1[$.

Comme $\underset{x\to 1}{lim} f_n(x) = (-1)^n$

Le théorème de la double limite entraînerait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ converge ce qui n'est pas le cas.

Donc la série ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

Q12. Comme $S_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

On note $\varphi_n : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \varphi_n(x)$ est continue sur $[0,1]$.
- $\forall x \in]0,1[$, $\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) = 0$ et φ est continue par morceau sur $]0,1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \times 2$ et la fonction $x \mapsto 2\,\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après la question 19.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,
$$\underset{n\to+\infty}{lim}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \underset{n\to+\infty}{lim} S_n(x)\,\mathrm{d}x = I(\alpha)$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{\alpha+k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

Q13. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $I(\alpha)+J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

par ailleurs :

$$\begin{aligned}
I(\alpha)+J(\alpha) &= I(\alpha)+I(1-\alpha)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{-\alpha+1+k}\\
&\text{on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme } p=k+1\\
&= \frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p}\\
&= \frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha+n}-\frac{1}{-\alpha+n}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(-2\alpha)}{-\alpha^2+n^2}\\
I(\alpha)+J(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

Q14. En posant $x=0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{sin(\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{sin(\alpha\pi)}$$