Séries numériques

Devoir Maison n°2

Exercice I

1) Question de cours : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ est convergente.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k}$

Vérifier que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

(b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} > 1$.

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \frac{a_n}{n}$.

On a donc : $\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} > 1$.

3) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

4) Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$$

5) Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2,3]$.

6) Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 < \sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$

7) Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$$

8) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice II

Soit x un réel de $]-1,1]$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul. Démontrer l'égalité suivante : $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^i + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$

2) En déduire l'égalité : $\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt$

3) Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge et préciser sa somme.

4) Montrer les égalités suivantes :

$$\ln(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \quad , \quad \ln(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i2^i}$$

5) Question de cours :(donc à redémontrer)
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs qui est décroissante et convergente vers 0.

(a) Montrer que la série $\sum(-1)^{n-1}u_n$ est convergente.

(b) Soit S sa somme et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles.
Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $|S-S_n|\leqslant u_{n+1}$.

6) Soit $p\in\mathbb{N}$. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près, pour tout entier $n\geqslant N_p$.

7) Soit p un entier naturel. On se propose de calculer une valeur de $\ln(2)$ à 10^{-p} près en utilisant les sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i2^i}\right)_{n\geqslant 1}$.

(a) Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $R_n=\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i2^i}$. Justifier l'inégalité : $0\leq R_n\leq\frac{1}{2^n}$

(b) Déterminer un entier N'_p tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i2^i}$ soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près, pour tout entier $n\geq N'_p$.

(c) Comparer N_p (question 6)) et N'_p.

Problème

Dans tout le problème on considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad u_n=H_n-\ln(n)$$

Partie I

1) Etablir pour tout entier naturel k non nul, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant\frac{1}{k}$$

2) (a) Montrer le comportement de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) A l'aide d'un encadrement donner u équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) (a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) En déduire la convergence de cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On note γ sa limite. Montrer que γ appartient $[0,1]$.

4) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier non nul k on pose

$$J_k=\frac{1}{2}\int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Etablir, pour tout entier non nul k, l'égalité suivante :

$$J_k=\frac{f'(k+1)-f'(k)}{8}-\frac{f(k+1)+f(k)}{2}+\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire, pour tout entier n non nul, la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \frac{f'(n)-f'(1)}{8} + \int_0^n f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5) On suppose dans cette question que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

(a) Montrer, pour tout entier k non nul :

$$0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire que la série $\sum J_n$ converge.

(c) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} J_k = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(d) En déduire que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Partie II

6) On considère deux suites de réels strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum a_n$ converge et $a_n \sim b_n$.

Redémontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

7) Soit α un réel strictement supérieur à 1.

(a) Justifier que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Partie III

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \dfrac{1}{2n}$.

8) Montrer que, pour tout entier n non nul,

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$$

9) En déduire l'égalité suivante :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Corrigé

1) <u>Question de cours</u> : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Correction : La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k}$

Vérifier que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

Correction :

$\diamond$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $s_{p+1} - s_p = \frac{1}{n+1+p} > 0$.

$\boxed{\text{Donc la suite } (s_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

$\diamond$ Or la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ est une série à termes positifs divergente. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = +\infty$.

Or $s_p = \sum\limits_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p = +\infty$.

$\boxed{\text{Ainsi la suite } (s_p)_{p\geqslant 1} \text{ diverge.}}$

(b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} > 1$.

Correction : Par définition comme $\lim\limits_{p\to+\infty} s_p = +\infty$,

$$\forall A > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant p_0,\ s_p \geqslant A$$

En particulier pour un réel $A > 1$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant p_0$, $s_p \geqslant A > 1$.

$\boxed{\text{Ainsi il existe au moins un entier naturel } p \text{ tel que l'on ait : } \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1.}$

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \dfrac{a_n}{n}$.

On a donc : $\displaystyle\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} > 1$.

3) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

Correction : Par définition de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

$\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty.}$

4) Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$$

Correction :

◇ Remarquons que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$.

Donc en sommant ces inégalités, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n}$.

En additionnant $\frac{1}{n}$ à cette inégalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{Donc } \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1.}$

◇

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{3n-2-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} \right) + \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

Or $\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a \neq b$ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$, car $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$.

Donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} > \frac{4}{4n-2}$.

Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} \right) > \frac{2(n-1)}{2n-1}$.

Donc $\sum\limits_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > \frac{2(n-1)}{2n-1} + \frac{1}{2n-1}$.

$\boxed{\text{Finalement } \sum\limits_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1.}$

5) Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2, 3]$.

Correction : D'après la définition de p_n et les inégalités précédentes, $n-1 \leqslant p_n \leqslant 2n-2$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n-1 \leqslant a_n \leqslant 3n-2$.

Alors en divisant par n ($n > 0$), $2 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 - \frac{2}{n}$.

Or la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. $\boxed{\text{Donc par passage à la limite } 2 \leqslant \ell \leqslant 3.}$

6) Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 < \sum\limits_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$

Correction : Soit $n \geqslant 0$.

Par définition de p_n, $1 < \sum\limits_{k=0}^{p_n} \frac{1}{n+k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{p_n - 1} \frac{1}{n+k} \leqslant 1$.

Donc $1 < \sum\limits_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$ et $\sum\limits_{k=n}^{a_n - 1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Ainsi } 1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}.}$

7) Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \sum_{k=n}^{a_n - 1} \frac{1}{k} \leqslant 1$$

Correction : Soit n un entier non nul.

◇ Soit k un entier non nul.

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$.

Donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{k}$.

Donc en sommant sur k de n à $a_n - 1$,

$$\sum_{k=n}^{a_n - 1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n - 1} \frac{1}{k}$$

Ou encore
$$\sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

◇ Or d'après la question précédente, $1 < \sum\limits_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$. Donc $1 - \frac{1}{n} < \sum\limits_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k}$.

Et $\sum\limits_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$. Donc $\sum\limits_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \tfrac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \tfrac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1.}$$

8) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

◇ Remarquons que $\int_n^{a_n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(a_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n)$.

Ainsi d'après les questions précédentes, $1 - \frac{1}{n} \leqslant \ln(u_n) \leqslant 1$.

◇ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.

Donc par encadrement, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 1$.

Par continuité de la fonction exp en 1, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e.}$

Exercice II

Soit x un réel de $]-1,1]$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul. Démontrer l'égalité suivante : $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^i + \dfrac{(-1)^n x^n}{1+x}$

Correction : Pour $x \in]-1,1[$, on utilise simplement la formule de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $(-x)$ différente de 1 : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \dfrac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$. On obtient alors directement le résultat.

Pour $x = 1$: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et donc on a bien $\dfrac{1}{2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k + \dfrac{(-1)^n}{2}$

Remarque : Il y a d'autres méthodes :
- par récurrence mais c'est long alors que le résultat est connu
- en mettant au même dénominateur le membre de droite, cela revient à refaire la démonstration du résultat connu, en même temps cela confirme qu'il est valable pour $x = 1$.
- ...

2) En déduire l'égalité : $\ln(1+x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt$

Correction : Comme toutes les fonctions qui interviennent sont continues sur le segment $[0,x]$ ou $[x,0]$, il suffit d'intégrer l'égalité précédente entre 0 et x et faire un changement d'indice dans la somme.

3) Démontrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge et préciser sa somme.

Correction : on peut commencer à dire que pour $x = 0$ le résultat est immédiat. Ensuite on utilise directement l'écriture de la somme partielle trouvée précédemment :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt$$

On va montrer que la partie intégrale (qui correspond au reste de la série) converge bien vers 0 (sans utilisation pour cette période de l'année de théorèmes d'inversion limite et intégrale qui sont inutiles ici). On a en effet :
$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt\right| \leq \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right|$$

On a deux cas :
si $x > 0$:
$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt\right| \leq \int_0^x t^n\,dt \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

si $x < 0$:
$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt\right| \leq \frac{1}{1-x}\left|\int_x^0 t^n\, dt\right| \leq \frac{1}{1-x}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$
Dans les deux cas, à x fixé, l'intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit que la série $\sum \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge et que sa somme est : $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i = \ln(1+x)$

Remarque : vouloir faire une démonstration de convergence de série, comme le critère spécial des séries alternées dans le cas $x > 0$, ou la comparaison avec une série géométrique, sauf dans le cas $x = 1$, ne permet pas de donner la valeur de la somme. Il reste en effet indispensable de montrer que l'intégrale tend vers 0.

4) Montrer les égalités suivantes :
$$\ln(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \qquad , \qquad \ln(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i2^i}$$
Correction : l'égalité trouvée à la question précédente est valable pour tout $x \in \left]-1, 1\right]$ en particulier pour $x = 1$ et pour $x = -\frac{1}{2}$ qui donnent les résultats demandés.

5) **Question de cours :**(donc à redémontrer)
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs qui est décroissante et convergente vers 0.

(a) Montrer que la série $\sum (-1)^{n-1} u_n$ est convergente.
Correction : vous irez relire votre cours en espérant que vous l'avez bien pris. ;-)

(b) Soit S sa somme et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $|S - S_n| \leqslant u_{n+1}$.
Correction : même chose.

6) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près, pour tout entier $n \geqslant N_p$.
Correction : on utilise la question précédente car la série est alternée. On a donc, d'après la question 4) : $\left|\ln(2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\right| \leq \frac{1}{n+1}$. Pour avoir une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} il suffit (et non nécessaire mais on ne peut répondre autrement) donc que $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-p}$, c'est à dire $n \geq 10^p - 1$. On a donc $N_p = 10^p$.

7) Soit p un entier naturel. On se propose de calculer une valeur de $\ln(2)$ à 10^{-p} près en utilisant les sommes partielles $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}\right)_{n\geqslant 1}$.

(a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i2^i}$. Justifier l'inégalité : $0 \leq R_n \leq \frac{1}{2^n}$
Correction : On a, pour tout $i \geq 1$, $\frac{1}{i2^i} \leq \frac{1}{2^i}$. On en déduit que, pour tout $N \geq 1$ et tout $n \geq 1$, on a
$$\sum_{i=n+1}^{N} \frac{1}{i2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{N} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$
On obtient alors le résultat par passage à la limite de N.

(b) Déterminer un entier N'_p tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}$ soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près, pour tout entier $n \geq N'_p$.
Correction : On a, d'après la question 4), $\ln(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i2^i}$, d'où, d'après la question précédente, $\ln(2) - \sum_{i=1}^{\mathbb{N}} \frac{1}{i2^i} \leq \frac{1}{2^n}$. Pour avoir une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près il suffit donc d'avoir $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-p}$. C'est à dire $n \geq p\frac{\ln(10)}{\ln(2)}$. On peut donc prendre $N'_p = \left\lceil p\frac{\ln(10)}{\ln(2)}\right\rceil$.

(c) Comparer N_p (question 6)) et N'_p.
Correction : On a peut remarquer que N_p dépend exponentiellement de p alors que N'_p est affine en p. La seconde série converge donc nettement plus rapidement que la première.

Problème

Dans tout le problème on considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n)$$

Partie I

1) Etablir pour tout entier naturel k non nul, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

Correction : on utilise le fait que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ et on intègre sur cet intervalle.

2) (a) Montrer le comportement de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction : Remarque : c'est une question de cours à redémontrer. cf cours

(b) A l'aide d'un encadrement donner u équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : A l'aide de la première question on montre que pour tout entier non nul, on a

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

. On en déduit, en faisant le rapport que $H_n \sim \ln(n)$.

3) (a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction : En faisant la différence on trouve directement, à l'aide de la première question que la suite est décroissante.

(b) En déduire la convergence de cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction : par le même encadrement trouvé à la question 2b), on a que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive. Elle est donc décroissante minorée donc convergente. Par propriété la limite est aussi positive. Comme le premier terme de la suite est 1, on obtient l'encadrement de γ. On note γ sa limite. Montrer que γ appartient $[0, 1]$.

4) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier non nul k on pose

$$J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Etablir, pour tout entier non nul k, l'égalité suivante :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction : il suffit de faire une double intégration par parties.

(b) En déduire, pour tout entier n non nul, la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_0^n f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

Correction : il suffit de sommer l'égalité précédente entre 1 et $n-1$, séparer en deux sommes les termes en $f(k)$ avec un changement d'indice, et téléscopage pour les dérivées.

5) On suppose dans cette question que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

(a) Montrer, pour tout entier k non nul :

$$0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3}\,\mathrm{d}t$$

Correction : on utilise l'expression de $f''(t)$ et une majoration de $t \mapsto \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2$ sur $[k, k+1]$.

(b) En déduire que la série $\sum J_n$ converge.

Correction : à l'aide de la majoration précédente, on obtient que $J_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$? et donc par critère de Riemann on a le résultat.

(c) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} J_k = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Correction : il suffit de sommer l'inégalité de la question 5a) entre $n+1$ et N, calculer l'intégrale et de faire tendre N vers $+\infty$.

(d) En déduire que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Correction : si on note $L = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} J_n$, alors,avec $f(x) = \frac{1}{x}$ l'égalité de la question 4b devient :

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \frac{-\frac{1}{n^2}+1}{8} + \ln(n) - L + \sum_{k=n}^{+\infty} J_k$$

on en déduit que $\gamma = \frac{5}{8} - L$ et, à l'aide des questions précédentes, le résultat demandé.

Partie II

6) On considère deux suites de réels strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum a_n$ converge et $a_n \sim b_n$.

Redémontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

Correction : c'est une question de cours.

7) Soit α un réel strictement supérieur à 1.

(a) Justifier que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Correction : on utilise la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Correction : on somme l'inégalité précédente entre $n+1$ et N, on calcule les intégrales puis on fait tendre N vers $+\infty$. L'encadrement obtenu permet de conclure.

Partie III

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \dfrac{1}{2n}$.

8) Montrer que, pour tout entier n non nul,

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$$

Correction : on utilise les différentes définitions et surtout une série téléscopique : en effet, ayant $u_n \to \gamma$ et donc $x_n \to \gamma$, on a $\gamma - x_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (x_k - x_{k-1})$.

9) En déduire l'égalité suivante :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction : on fait un développement limité de $\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$ et on utilise la partie II.