Exercice 1.

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\,\cos(p)\,\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\,\sin(p)\,\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n\,\cos(nx)}{n\,!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathscr{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,C(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,C(x)\,\mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.

4.2 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\alpha^n\,\cos^2(nx)}{n\,!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0,2]$.

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin(nx)}{3^n}.$$

Étude de l'application $\boldsymbol{\varphi}$

Q11. Démontrer que φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q12. Pour tout x réel, justifier l'écriture :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{3^n}\right)$$

et en déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Q13. Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Q14. À l'aide de $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ démontrer que :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}\left((-1)^{n-1}+1\right)$$

puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Q15. Retrouver cette valeur par un calcul direct.