

Séries numériques

Devoir Maison n°3

Formule de Stirling

Le but du problème est de démontrer la formule de Stirling qui donne un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

On a l'équivalent :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} = n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

Partie I : Dans cette partie, on va montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

On commence par étudier $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$.

On peut se dire que $\ln(n!)$ ne doit pas être très différent de $n \ln n$. On étudie donc $\ln(n!) - n \ln n$.

1. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $n \ln n = \sum_{k=2}^n k \ln(k) - (k-1) \ln(k-1)$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(n!) - n \ln n = \sum_{k=2}^n (k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

2. Faire un développement asymptotique de $(k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ pour k tendant vers $+\infty$ à l'ordre 2.

3. En déduire qu'il existe une suite (α_k) telle que

$$\alpha_k \sim \frac{1}{6k^2} \text{ et } \forall n \geq 2, \ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^n \alpha_k.$$

4. (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n \right) \rightarrow C.$$

On pourra utiliser que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

(b) En déduire qu'il existe une constante K telle que

$$n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Partie II :

On veut maintenant déterminer la valeur de K . Pour cela on définit pour tout entier $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 .

(b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

(c) En déduire des formules pour I_{2p} et I_{2p+1} . Les formules voulues font intervenir des factorielles et des puissances de 2.

2. (a) Déterminer le sens de variation de (I_n) .

(b) Montrer que $I_{n+2} \sim I_n$ et en déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

(c) Montrer que $(n+1)I_n I_{n+1}$ est une suite constante et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3. Montrer que la constante K de la question 4.b) de la partie I vaut $\sqrt{2\pi}$.

Corrigé

Partie I :

1. (a) Pour tout entier $n \geq 2$, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^n k \ln(k) - (k-1) \ln(k-1) = n \ln n - 1 \ln 1 = n \ln n$$

(b) Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \ln(n!) - n \ln n &= \sum_{k=2}^n \ln k - \sum_{k=2}^n k \ln(k) - (k-1) \ln(k-1) \\ &= \sum_{k=2}^n (k-1) \ln(k-1) - (k-1) \ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^n (k-1) \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

2. Pour $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} (k-1) \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= (k-1) \left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \\ &= -1 - \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= -1 + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

3. On pose $\alpha_k = (k-1) \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1 - \frac{1}{2k}$ de sorte que $\alpha_k \sim \frac{1}{6k^2}$ et que

$$(k-1) \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) = -1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k$$

On en déduit que

$$\ln(n!) - n \ln n = \sum_{k=2}^n -1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k = -(n-1) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^n \alpha_k$$

Donc, pour $n \geq 2$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^n \alpha_k$$

4. (a) Comme $(\alpha_k) \sim \frac{1}{6k^2}$ et que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \alpha_k$ converge. Si on note S sa somme on a donc pour $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \alpha_k = S + o(1)$.

En utilisant la propriété donnée dans la question,

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma - 1) + S + o(1)$$

On en déduit que

$$\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n = \frac{\gamma + 1}{2} + S + o(1)$$

et donc, en posant $C = \frac{\gamma+1}{2} + S$,

$$\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n\right) \longrightarrow C$$

(b) En prenant l'exponentielle et en notant $K = \exp(C)$, on a

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \exp\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n\right) \longrightarrow K$$

et donc

$$n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

Partie II :

1. (a) On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.

(b) Pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin t \times (\sin t)^{n+1} dt \\ &= [-\cos t \times (\sin t)^{n+1}]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \times (\sin t)^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \times (\sin t)^n dt \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ puis que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

(c) Par une récurrence immédiate on a pour $p \geq 0$,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times I_{2p-2} = \dots = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{1}{2} I_0$$

et donc

$$I_{2p} = \frac{\prod_{k=1}^p 2k-1}{\prod_{k=1}^p 2k} \frac{\pi}{2} = \frac{\prod_{k=1}^{2p} k}{\left(\prod_{k=1}^p 2k\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

De même,

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

2. (a) Pour tout entier naturel n ,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} - (\sin t)^n dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t - 1)(\sin t)^n dt \leq 0$$

car pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(\sin t - 1)(\sin t)^n \leq 0$.

La suite (I_n) décroît.

(b) La formule trouvée en 1.b) montre que

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

et donc $I_n \sim I_{n+2}$.

En utilisant maintenant la décroissance de la suite (I_n) ,

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

En divisant par $I_n > 0$,

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

Par le théorème d'encadrement, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et donc $I_{n+1} \sim I_n$.

(c) On pose $\theta_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n ,

$$\theta_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}I_n = \theta_n$$

La suite (θ_n) est constante égale à $\theta_0 = I_0 \cdot I_1 = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

En utilisant la question précédente, on a donc

$$I_n^2 \sim I_n \cdot I_{n+1} \sim \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$$

En prenant la racine carrée et en utilisant que I_n est positif, on obtient que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3. Reprenons la formule trouvée pour I_{2p} en remplaçant les factorielles avec la formule obtenue en fin de la partie I

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p} e^{-2p} \sqrt{2p} \pi}{(K 2^p p^p e^{-p} \sqrt{p})^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{2p} \pi}{K p} \frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{K \sqrt{2p}}$$

En reprenant l'équivalent trouvé à la question précédente,

$$\frac{\pi}{K \sqrt{2p}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4p}}$$

On en déduit que la constante K de la question 4.b) de la partie I vaut $\sqrt{2\pi}$.