

Devoir Maison

Intégrales à Paramètre

CNC 2003

Définitions et notations

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} ; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classes \mathcal{C}^p , \mathcal{C}^{∞}) à valeurs complexes. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et tout réel x , on pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt,$$

lorsque cette quantité a un sens.

Quand elle est définie, La fonction \hat{f} s'appelle la transformée de FOURIER de f .

I. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1. Soient x et α deux réels strictement positifs.

(a) Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, \alpha]$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$.

2. Dans la suite, φ désigne la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

(a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x , $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.

(b) Justifier que φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et donner l'expression de φ' .

(c) Montrer que, lorsque x tend vers 0^+ , $\varphi(x) + \ln x$ tend vers

$$C = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$$

(on pourra exprimer $\ln x$ sous forme d'une intégrale.)

(d) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) + \ln x = C + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt,$$

et en déduire que

$$\varphi(x) + \ln x = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k \cdot k!}.$$

3. Soit ψ la fonction définie sur \mathbb{R}^* par

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \varphi(|x|).$$

(a) Montrer que ψ est intégrable sur les deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

(b) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\psi}(x)$ a un sens et que

$$\widehat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt.$$

(c) Montrer que $\widehat{\psi}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et exprimer ses dérivées successives sous forme d'intégrales.

(d) Montrer que, pour tout réel non nul x , on a

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt,$$

et calculer $\widehat{\psi}(0)$.

4. (a) Montrer que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\Phi'(x)$, pour tout $x > 0$, puis l'exprimer sans utiliser le signe intégrale.

(b) En déduire soigneusement que pour tout réel non nul x ,

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

1. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

(a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} ; montrer que pour tout réel x , $\widehat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction \widehat{f} est bornée.

(b) Si en plus f est continue, montrer que \widehat{f} est aussi continue.

2. Transformations

(a) Montrer que l'application $F : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$, définie sur l'espace vectoriel des fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur \mathbb{R} , à valeur dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, est linéaire.

Dans la suite de cette question, f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} .

(b) Vérifier que pour tout réel a , les fonctions $f_a : t \mapsto f(t - a)$ et ${}_a f : t \mapsto f(at)$ possèdent des transformées de Fourier et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}_a(x) = e^{-iax} \widehat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{{}_a f}(x) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a \neq 0).$$

(c) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ en fonction de celle de f .

(d) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformée de Fourier sous forme d'une intégrale sur $]0, +\infty[$.

(e) Que peut-on alors dire de la transformée de Fourier d'une fonction réelle et paire (resp. impaire).

3. Dérivation

On considère un élément f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur \mathbb{R} .

(a) Montrer que \hat{f} tend vers 0 en $\pm\infty$.

(b) Montrer alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(x) = ix\hat{f}(x),$$

puis en déduire que \hat{f} tend vers 0 en $\pm\infty$.

(c) On suppose de plus que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} ; montrer que \hat{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\hat{f})'(x) = -i\hat{g}(x).$$

III. UNE FORMULE D'INVERSION

A- Un autre exemple

Dans cette section, h désigne la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$; on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = \sqrt{\pi}$.

1. Vérifier que \hat{h} est bien définie, dérivable sur \mathbb{R} et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}y = 0. \quad (1)$$

2. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de \hat{h} .

3. Donner alors l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}$, $\varepsilon > 0$.

B- Application à la formule d'inversion

Dans cette section, f désigne une fonction continue, bornée et intégrable sur \mathbb{R} telle que \hat{f} soit aussi intégrable sur \mathbb{R} . Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0.

1. (a) Soit $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} . En utilisant le théorème de la convergence dominée, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) dy.$$

(b) Montrer de même que si $w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est une fonction bornée alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x + \varepsilon_n y)e^{-y^2} dy = w(x)\sqrt{\pi}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon_n y^2} dy \right) dt = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n} s)e^{-s^2} ds.$$

3. Soit x un nombre réel.

(a) Justifier que, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls et tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-p}^p e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^q f(t) e^{-iyt} dt \right) dy = \int_{-q}^q f(t) \left(\int_{-p}^p e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2} dy \right) dt.$$

(b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^q f(t) e^{-iyt} dt \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy.$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul q et tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-q}^q f(t) \left(\int_{-p}^p e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2} dy \right) dt = \int_{-q}^q f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2} dy \right) dt.$$

(d) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2} dy \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon y^2} \hat{f}(y) dy.$$

4. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) dy.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

CONCOURS MAROCAIN : *Corrigé 2003* *Maths 1, MP*

Mr Mamouni

I. ETUDE D'UN EXEMPLE

- 1) a) On a : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$, donc la fonction est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, \alpha]$ et par suite intégrable sur l'intervalle $]0, \alpha]$.
- b) On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \frac{e^{-t}}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ l'est aussi.
- 2) Dans la suite, φ désigne la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
- a) On a : $\frac{e^{-t}}{t} > 0 \quad \forall t \in [x, +\infty[$, donc $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt > 0$, d'autre part :
 $\frac{e^{-t}}{t} < \frac{e^{-t}}{x} \quad \forall t \in [x, +\infty[$, donc $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt < \varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{e^{-x}}{x}$, donc on a montré que, pour tout réel strictement positif x on a : $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.
- b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ est dérivable comme différence d'une constante, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et d'une primitive $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ de $\frac{e^{-x}}{x}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.
- c) $\varphi(x) + \ln x = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$

tend vers

$$C = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

quand x tend vers 0^+ , notez bien qu'on a utilisé les intégrales $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ qui sont définies puisque associées à des fonctions intégrables d'après les conclusions précédentes.

- d) Une simple utilisation de la relation de Chasles pour intégrer donne pour tout $x > 0$, $\varphi(x) + \ln x = C + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$.

D'autre part : pour tout $t > 0, n \in \mathbb{N}^*$ on a : $e^{-t} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k}{k!} + \frac{R_n(t)}{t}$

$R_n(t)$, série alternée, avec $|R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^{k-1}}{k!} - \frac{R_n(t)}{t} \right) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^x \frac{(-1)^{k-1} t^{k-1}}{k!} dt - \int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^x \frac{(-1)^{k-1} t^{k-1}}{k!} dt - \int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k \cdot k!} - \int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt, \text{ or}$$

$$\left| \int_0^x \frac{R_n(t)}{t} dt \right| \leq \int_0^x \frac{|R_n(t)|}{t} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{(n+1)!} dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \text{ pour } x > 0 \text{ fixe,}$$

$$\text{puissances sont négligeables devant les factoriels. Donc quand } n \rightarrow +\infty \text{ avec } x > 0 \text{ fixe, on obtient : } \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt \rightarrow C + \ln x$$

avec $x > 0$ fixe, on obtient : $\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt \rightarrow C + \ln x$

avec $x > 0$ fixe, on obtient : $\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt \rightarrow C + \ln x$

$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k k!}$ et on peut en déduire que

$$\varphi(x) + \ln x = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k k!}.$$

- 3) a) Montrons d'abord que φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, en effet d'après les questions 2.a et 1.b on peut affirmer que φ est intégrable sur $]1, +\infty[$ et d'après la question 2.d et vu que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k k!} \sim x$ au voisinage de 0, on peut affirmer aussi que $\varphi(x) + \ln x \sim C + x$ au voisinage de 0, or $x \mapsto C + x$ et $x \mapsto \ln x$ sont intégrables sur $]0, 1[$, ($\int_x^1 |\ln t| dt = 1 + x \ln x - x$) donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et par suite $\psi x : \mapsto \varphi(|x|)$ est intégrable sur les deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ixt}\psi| \leq |\varphi(t)|$ et $t \mapsto |\psi|$ intégrable sur les deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, donc $t \mapsto e^{ixt}\psi(t)$ l'est aussi donc les intégrales $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{ixt}\psi dt$ et $I_2 = \int_{-\infty}^0 e^{ixt}\psi(t) dt$ ont un sens et donc $\widehat{\psi}(x) = I_1 + I_2$ a un sens. D'autre part : $\widehat{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\psi(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{ixt}\varphi(t) dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^{ixt}\varphi(-t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{ixt}\varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-ixu}\varphi(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{ixt}\varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-ixt}\varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt.$
- c) La fonction $\xi : (x, t) \mapsto \varphi(t) \cos(xt)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à t pour x fixé, elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} par rapport x dont la dérivée n -ème est $\frac{\partial^n \xi}{\partial x^n} : t \mapsto t^n \varphi(t) \cos(xt + n\frac{\pi}{2})$, on a $|\frac{\partial^n \xi}{\partial x^n}(x, t)| \leq t^n \varphi(t) \quad \forall t \in]0, +\infty[$. Montrons alors que $t \mapsto t^n \varphi(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$,

en effet au voisinage de 0 on a :

$t^n \varphi(t) + t^n \ln t \sim Ct^n + t^{n+1}$, or $t \mapsto t^n C + t^{n+1}$ et $t \mapsto t^n \ln t$ sont intégrables sur $]0, 1[$ donc $t \mapsto t^n \varphi(t)$ est intégrable sur $]0, 1[$.

La suite $\xi : t \mapsto t^n \varphi(t)$ est intégrable sur $]0, 1[$, et donc $t \mapsto \frac{\partial^n \xi}{\partial x^n}$ est aussi intégrable sur $]0, 1[$.

D'autre part, d'après la question 2.a $0 < t^n \varphi(t) < t^{n-1} e^{-t}$ sur $]0, +\infty[$ et comme $t^{n-1} e^{-t}$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, car les exponentielles l'emportent devant les puissances, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ alors $t \mapsto t^n \varphi(t)$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ et par suite $t \mapsto \frac{\partial^n \xi}{\partial x^n}(x, t)$ l'est aussi.

Conclusion : $t \mapsto \frac{\partial^n \xi}{\partial x^n}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, le théorème de dérivation sous signe intégrale permet d'affirmer que $\widehat{\psi}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec :

$$\widehat{\psi}^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^n \varphi(t) \cos(xt + n\frac{\pi}{2}) dt$$

- d) Pour tout réel non nul x , on a à l'aide d'une intégration par parties :
- $$\widehat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt = \left[\varphi(t) \frac{\sin xt}{x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \frac{\sin xt}{x} dt = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt,$$
- car d'après 2.a $|\varphi(t) \frac{\sin xt}{x}| \leq \frac{e^{-t}}{x} \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$ pour x fixé, et d'après 2.d $\varphi(t) + \ln t \sim C + t$ au voisinage de 0, donc $\varphi(t) \frac{\sin xt}{x} + \frac{\sin xt}{x} \ln t \sim (C + t) \frac{\sin xt}{x}$ quand $t \rightarrow 0$ pour x fixé, comme $\frac{\sin xt}{x} \sim t$ quand $t \rightarrow 0$ pour x fixé, alors $\varphi(t) \frac{\sin xt}{x} + (C + t)t$ quand $t \rightarrow 0$ pour x fixé et donc $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \frac{\sin xt}{x} = 0$, fixé.
- Ainsi $\widehat{\psi}(x) = \frac{F(x)}{x}$, avec $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \rho(x, t) dt$ telle que Φ est

$\rho(x, t) = \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)$, donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0)$ à condition qu'on peut dériver sous signe intégral, ce qui n'est pas difficile à justifier puisque $\frac{\partial \rho}{\partial x} : t \mapsto e^{-t} \cos xt$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque majorée par e^{-t} , intégrable sur $[0, +\infty[$, pour x fixé.

Donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x}(0, t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

4) a) Dans la question précédente on a déjà montré que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

$$\Phi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt, \text{ pour tout } x > 0, \text{ puis on a :}$$

$$\Phi'(x) = \Re \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} dt = \Re \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt = \Re \left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} =$$

$$-\Re \left(\frac{1}{ix-1} \right) = \frac{1}{x^2+1}. \text{ Notez bien que : } |e^{(ix-1)t}| = e^{-t} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

b) D'après la question précédente, on a : $\widehat{\psi}(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ pour tout réel non nul x , et Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ avec $\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x > 0$, donc $\Phi(x) = \arctan x + \lambda \quad \forall x > 0$, de même $\Phi(x) = \arctan x + \mu \quad \forall x < 0$, donc

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x + \lambda}{x} & \forall x > 0 \\ \frac{\arctan x + \mu}{x} & \forall x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

comme $\widehat{\psi}$ est continue sur \mathbb{R} alors $\lambda = \mu = 0$ d'où le résultat.

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

1) Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

a) Pour x fixé, on a : $|e^{-ixt} f(t)| \leq |f(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}$, or f une fonction continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} ; donc $t \mapsto e^{-ixt} f(t)$ l'est aussi d'où pour tout réel x , $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$ est bien définie,

en plus $|\widehat{f}(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = M$, ce qui ne dépend pas de x et donc la fonction \widehat{f} est bornée.

b) Si de plus f est continue, alors $t \mapsto e^{-ixt} f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} , donc \widehat{f} est aussi continue.

2) Transformations

a) Soient φ_1, φ_2 deux fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur \mathbb{R} , et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\varphi_1 + \lambda \varphi_2$ est aussi une fonction complexe continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} .

$$F(\varphi_1 + \lambda \varphi_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} (\varphi_1 + \lambda \varphi_2)(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi_1(t) dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi_2(t) dt = F(\varphi_1)(x) + \lambda F(\varphi_2)(x)$$

donc F est linéaire.

b) f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} . Pour tout réel a , les fonctions $f_a(t) = f(t-a)$ et ${}_a f(t) = f(at)$ sont aussi des fonctions continues par morceaux et intégrables sur \mathbb{R} et par suite possèdent des transformées de Fourier, avec que pour

$$\text{réel } x, \widehat{f}_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t-a) dt = e^{-iax} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} f(u) du$$

$= e^{-iax} \widehat{f}(x)$, en utilisant le changement de variable $u = t-a$ (même avec le changement de variable $v = at$ on obtient $\frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ ($a \neq 0$), faites attention ici aux bornes si $a < 0$ alors $+$ devient $+$ et inversement ce qui justifie le $|a|$).

c) La transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ au point

$$\text{est : } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t} f(t) dt = \widehat{f}(x-a).$$

d) Si f est paire alors $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-ixt} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{ixu} f(-u) du = \int_0^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{ixu} f(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{ixu} f(u) du$$

$2 \int_0^{+\infty} \cos(xt)f(t)dt$, on a utilisé le changement de variable $u = -t$ puis on a remplacé u par t puisque sont deux variables muettes.

Si f est impaire on obtient $\widehat{f}(x) = 2i \int_0^{+\infty} \sin(xt)f(t)dt$.

- e) La transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est réelle alors que celle d'une fonction réelle impaire est imaginaire.

3) Dérivation

- a) f' étant intégrable sur \mathbb{R} , donc $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, et donc $\lim_{+\infty} f$ est finie, soit L cette limite, si $L \neq 0$ alors $|f(x)| \rightarrow |L| > \frac{|L|}{2}$, quand $x \rightarrow +\infty$, or f est continue, donc un intervalle $[A, +\infty[$ sur lequel $|f| > \frac{|L|}{2}$, or f est intégrable sur $[A, +\infty[$, donc le fonction constante $\frac{|L|}{2}$ le sera aussi, ce qui n'est pas le cas, donc $L = \lim_{+\infty} f = 0$, et de même on montre que $\lim_{-\infty} f = 0$.

- b) f' étant une fonction continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , donc admet une transformée de Fourier, définie par la relation : $\forall x \in \mathbb{R} : \widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f'(t)dt = [e^{-ixt} f(t)]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} + ix \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt = ix\widehat{f}(x)$, donc $\widehat{f}(x) = \frac{\widehat{f'}(x)}{x}$ tend vers 0 en $\pm\infty$, car $\widehat{f'}$ est bornée en utilisant la question II.1.a pour la fonction f' .

- c) Le fait que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} nous permet d'affirmer que \widehat{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et de dériver sous le signe intégral ; avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\widehat{f})'(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} tf(t)dt = -i\widehat{g}(x).$$

III. UNE FORMULE D'INVERSION

A-Un autre exemple

- 1) La fonction h est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , intégrable sur \mathbb{R} , et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} , (car négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$), donc \widehat{h} est définie, dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{h'}(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} te^{-t^2} dt = -i \left[-e^{-ixt} \frac{e^{-t^2}}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\frac{x}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{-t^2} dt = -\frac{x}{2} \widehat{h'}(x) \text{ et donc } \widehat{h} \text{ satisfait l'équation différentielle } y' + \frac{x}{2}y = 0.$$

- 2) La solution générale de l'équation différentielle (1) est de la forme $y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$, donc $\widehat{h}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ où $\lambda = \widehat{h}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

- 3) $e^{-\varepsilon t^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} h(t)$, donc d'après la question II.2.b la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\varepsilon t^2}$, $\varepsilon > 0$ est : $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \widehat{h}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$.

B-Application à la formule d'inversion

- 1) a) Soit les $v_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ définies par $v_n(y) = v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}$, se sont des fonctions intégrables sur \mathbb{R} car dominées par v intégrables sur \mathbb{R} qui de plus convergent simplement vers v . En utilisant le théorème de la convergence dominée, on a que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) dy$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) dy.$$

- b) Même que précédemment, poser $w_n(y) = w(x + \varepsilon_n y)e^{-y^2}$ c'est une fonction intégrable sur \mathbb{R} car bornée par la fonction intégrable w qui de plus converge simplement vers $w(x)e^{-y^2}$, de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(y) = w(x)e^{-y^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x + \varepsilon_n y)e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} w(x + \varepsilon_n y)e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)e^{-y^2} dy = w(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = w(x) \sqrt{\pi}.$$

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a, et ceci d'après la question III.A.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon_n y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \widehat{h}\left(\frac{t-x}{\sqrt{\varepsilon_n}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}} e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon_n y^2} dy \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}} e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}} dt = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n s}) e^{-s^2} ds, \text{ en effectuant le changement de variable } s = \frac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}}.$$

3) a) C'est le théorème de Fubini qui nous permet d'invertir les deux intégrales, puisqu'il s'agit d'une fonction continue sur le carré $[-p, p] \times [-q, q]$.

b) Posons, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f_q(y) = e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^q f(t) e^{-iyt} dt \right)$, on a :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} f_q(y) = e^{ixy - \varepsilon y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \text{ et } |f_q(y)| \leq 2q \sup_{\mathbb{R}} |f| e^{-\varepsilon y^2},$$

majorée normalement par une fonction intégrable sur \mathbb{R} , donc $\lim_{q \rightarrow +\infty} f_q$ est intégrable sur \mathbb{R} avec

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_q(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{q \rightarrow +\infty} f_q(y) dy, \text{ ce qui donne pour tout } \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^q f(t) e^{-iyt} dt \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy.$$

c) Le même raisonnement que précédemment en posant cette fois $g_q(t) = f(t) \left(\int_{-p}^p e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2} dy \right)$, et faire tendre p vers $+\infty$ nous

permet d'affirmer aussi que pour tout entier naturel non nul n et tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-q}^q f(t) \left(\int_{-p}^p e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2} dy \right) dt = \int_{-q}^q f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2} dy \right) dt$$

d) Conclusion immédiate des questions précédentes.

4) D'après les questions III.B.2. et III.B.3.c, en remplaçant ε par $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0,

$$2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n s}) e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon_n y^2} \widehat{f}(y) dy. \text{ Et après avoir vérifié qu'on peut intervertir limites et intégrales, chose qui n'est pas difficile puisque } e^{ixy - \varepsilon_n y^2} \widehat{f}(y) \text{ sont normalement bornées par } \widehat{f}, \text{ intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n s}) e^{-s^2} \text{ sont normalement bornées par } \sup_{\mathbb{R}} |f| e^{-s^2} \text{ intégrable sur } \mathbb{R} \text{ aussi, donc quand } n \rightarrow +\infty, \text{ on obtient : pour tout } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \widehat{f}(y) dy, \text{ comme } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi} \text{ on a le résultat.}$$

Fin.