PRÉPAS ELBILIA
**Prépas MP**

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

# DS n° 1 : Réduction

**Durée : 4 heures**

**AVERTISSEMENT**

**L'usage de calculatrices est interdit.**

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

**Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.**

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

## Exercice : e3a MP, 2016

*On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

*et on pose* $F = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$ *et* $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AB = BA\}$. *Dans cet exercice, la transposée d'une matrice* $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *est notée* $M^\top$.

### Partie 1 – Réduction de la matrice $A$

**1.** Déterminer le polynôme caractéristique et le spectre de $A$.

**2.** Déterminer les sous-espaces propres de $A$ puis une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P$ est orthogonale et $P^\top AP$ est diagonale.

*Dans la suite, on pose* $D = P^\top AP$.

### Partie 2 – Étude de $\mathscr{C}(A)$

**3.** Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**4.** Démontrer que $F \subset \mathscr{C}(A)$.

**5.** Pour une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, établir l'équivalence :

$$B \in \mathscr{C}(A) \iff P^\top BPD = DP^\top BP$$

**6.** Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est un espace vectoriel de dimension 3.

**7.** Démontrer que $\mathscr{C}(A) = F$.

**8.** La matrice $A^3$ appartient-elle à $F$ (on justifiera la réponse) ?

# Problème : e3a MP, 2019

**Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2**

## Partie I

**1.** Rappel des propriétés de la trace d'une matrice notée **tr**.

**1.1** Montrer que **tr** est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**1.2** Prouver que : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$.

**1.3** En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

**2.** Dans toute la suite du problème, $A$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

**2.1** Justifier l'existence d'une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^{-1}AC = D$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

**2.2** Vérifier alors que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{tr}(A^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

## Partie II

Soit $Q$ un polynôme de degré $n$ de $\mathbb{C}[X]$ : $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

On note $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ses racines complexes, distinctes ou non et on a donc : $Q(X) = b_n \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $T_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$ et $T_0 = n$.

**L'objectif de cette partie est de calculer les termes de la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir des coefficients du polynôme $Q$.**

**1.** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel $m \geq 1$, on a : $X^m - a^m = (X - a)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-1-k}\right)$.

**2.** Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note $Q_i$ le polynôme défini par : $Q_i(X) = \dfrac{Q(X)}{X - \alpha_i}$.

Montrer que $Q'$ est une combinaison linéaire des $Q_i$ que l'on déterminera.

**3.** En remarquant que $Q_i(X) = \dfrac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i}$, montrer que l'on a :

$$Q_i(X) = \sum_{r=1}^{n} \left( \sum_{k=r}^{n} b_k \alpha_i^{k-r} \right) X^{r-1}$$

**4.** Déduire des questions **2** et **3** que l'on a : $\forall r \in [\![1, n]\!]$, $rb_r = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j$.

**5.** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Exprimer $T_k$ en fonction de $T_0, \cdots, T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme $Q$.

**6.** Soit $k \geq n$.

**6.1** Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j T_{k-n+j} = 0$.

**6.2** Exprimer alors $T_k$ à l'aide de $T_{k-n}, T_{k-n+1}, \cdots, T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme $Q$.

**7.** Conclure.

**Partie III**

On rappelle que $A$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et on pose :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

et pour tout élément $k$ de $\mathbb{N}^*$, $S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

On considère alors le système linéaire $(\Sigma)$ dont les inconnues sont $u_1, \cdots, u_n$ et défini par les $n$ équations suivantes :

$$S_1 + u_1 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!], \quad S_k + u_1 S_{k-1} + u_2 S_{k-2} + \cdots + u_{k-1} S_1 + k u_k = 0$$

**1.** Démontrer que le système $(\Sigma)$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^n$.

**2.** Vérifier que $u_1 = a_{n-1}$ et que $u_2 = a_{n-2}$. On pourra utiliser les relations coefficients racines d'un polynôme.

**3.** En utilisant la partie **II**, montrer que $(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0)$ est solution du système $(\Sigma)$.

**4.** En déduire que l'on a : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = a_{n-k}$.

**Partie IV**

**1.** Justifier que $P(A) = O_n$.

**2.** Prouver l'équivalence : $A$ inversible $\iff a_0 \neq 0$.

**3.** Montrer que la matrice $A^{-1}$, si elle existe, s'écrit comme un polynôme en $A$.

**4.** On considère la suite $(B_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la suite $(d_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ de réels définies par :

$$\begin{cases} d_1 = -\mathbf{tr}(A), \ B_1 = A + d_1 I_n \\ \forall k \in [\![2, n]\!], \ d_k = -\dfrac{1}{k}\mathbf{tr}(B_{k-1}A) \text{ et } B_k = B_{k-1}A + d_k I_n \end{cases}$$

**4.1** Etablir que l'on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$$

**4.2** Montrer que l'on a aussi :

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \ d_k = -\frac{1}{k}\left(\mathbf{tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \mathbf{tr}(A^{k-i})\right)$$

**4.3**

**4.3a** Prouver alors que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \ d_k = a_{n-k}$

**4.3b** Déterminer $B_{n-1}$.

**4.3c** Déterminer $B_n$. Le résultat était-il prévisible ?

**5.** Aplication : On prend $n = 4$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Utiliser la méthode étudiée au-dessus pour déterminer le polynôme caractéristique de $A$ et la matrice $A^{-1}$.

On pourra utiliser que : $B_2 A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

## Facultative (Bonus, hors barème)

**6.** Le listing ci-dessous fournit 5 fonctions écrites en langage Python. Les matrices seront notées comme des listes de listes.

```python
def fonction1(A,B) :
    n=len(A)
    C=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            s=0
            for k in range(n):
                s+=A[i][k]*B[k][j]
            L.append(s)
        C.append(L)
    return C

def fonction2(x,n):
    A=[]
    for i in range(n):
        L=[0]*n
        L[i]=x
        A.append(L)
    return A

def fonction3(A):
    n=len(A)
    S=0
    for i in range(n):
        S+=A[i][i]
    return S

def fonction4(A,x):
    n=len(A)
    B=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            L.append(A[i][j]*x)
        B.append(L)
    return B

def fonction5(A,B):
    n=len(A)
    C=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            L.append(A[i][j]+B[i][j])
        C.append(L)
    return C
```

**6.1** Déterminer les types d'arguments pris par chaque fonction et le résultat qu'elles retournent.

**6.2** Compléter le programme ci-dessous permettant d'afficher les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice $A$.

```python
d=[1]
A=[[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
n=len(A)
#
# Compléter le programme
#
#
print("Les coefficients du polynôme caractéristique, dans l'ordre décroissants des puissances sont :",d)
```

**Corrigé e3a MP-mathématiques 1**

# Exercice 1.

1. Pour $x$ dans $\mathbb{R}$ on a
$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 0 \\ -1 & x+2 & -1 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ x & x+2 & -1 \\ x & -1 & x+1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$$
$$\chi_A(x) = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x+3 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$
$$\boxed{\chi_A = X\,(X+1)\,(X+3),\ \mathrm{Sp}(A) = \{0,-1,-3\}}\ .$$

2. La matrice $A$ étant symétrique et réelle, elle est ortho-diagonalisable. Il y a trois valeurs propres simples et il suffit de normer les vecteurs de bases choisis pour les trois droites propres pour obtenir les colonnes d'une matrice $P$ qui convient.

   Pour la valeur propre 0 (somme constante des lignes), il suffit de prendre le vecteur $(1,1,1)^T$, donc $\frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,1)^T$.

   Avec $A+I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le sous-espace propre est la droite d'équation $\begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$ engendrée par le vecteur $\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,-1)^T$.

   Les sous-espaces propres étant orthogonaux on peut prendre pour troisième vecteur le produit vectoriel des deux premiers *(programme de mathématiques pour la physique et les sciences de l'ingénieur)* et on obtient $\frac{1}{\sqrt{6}}\,(-1,2,-1)^T$.

   *(si on ne veut faire cela on résout $(A+3\,I_3)\,X = 0$)*

   Ainsi, avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})}$ on obtient
$$\boxed{P^T\,A\,P = P^{-1}\,A\,P = D = \mathrm{diag}(0,-1,-3)}\ .$$

3. L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ est non vide car il contient au moins toutes les matrices scalaires, dont $O$ et $I_3$, et aussi toutes les puissances de $A$ (et les polynômes en $A$ ...)

   Si $(B,C) \in \mathcal{A}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, avec la structure d'algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a
$$(\alpha\,B + \beta\,C)\,A = \alpha\,B\,A + \beta\,C\,A = \alpha\,A\,B + \beta\,A\,C = A\,(\alpha\,B + \beta\,C),$$
   ce qui donne $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ sous-espace vectoriel de de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .

   *(c'est même une sous-algèbre ...)*

4. Avec $A\,A^k = A^{k+1} = A^k\,A$ pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, on a $A^k \in \mathcal{A}$ pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, donc, comme $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel, $\boxed{F \subset \mathcal{C}(A)}$ .

5. Avec $A = P\,D\,P^T$ on a $B\,A = A\,B \iff B\,P\,D\,P^T = P\,D\,P^T\,B$, c'est-à-dire, en multipliant à gauche par $P^T = P^{-1}$ et à droite par $P$,
$$\boxed{B\,A = A\,B \iff (P^T\,B\,P)\,D = D\,(P^T\,B\,P)}\ .$$

6. En notant $C = P^T\,B\,P$, comme la matrice $D$ est diagonale à termes diagonaux distincts, avec $C\,D = D\,C$ on a $C$ diagonale.

*(si $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, on a $C\,D = (\alpha_j\, c_{i,j})$ et $D\,C = (\alpha_i\, c_{i,j})$, donc $(\alpha_i - \alpha_j)\, c_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j)$ dans $[\![1,3]\!]^2$ et alors $i \neq j$ entraine $\alpha_i - \alpha_j \neq 0$ donc $c_{i,j} = 0$, ce qui signifie que $C$ est diagonale)*

Comme les matrices diagonales commutent entre elles, on a donc

$$C\,D = D\,C \iff C \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R}),$$

où $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ est le sous-espace de dimension 3 des matrices diagonales :

$$\mathcal{D}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}).$$

*($\left(E_{i,j} = (\delta_{i,k}\,\delta_{j,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)*

Avec l'équivalence établie ci-dessus, on a donc

$$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(P\,E_{1,1}\,P^T, P\,E_{2,2}\,P^T, P\,E_{3,3}\,P^T).$$

L'application $M \mapsto P\,M\,P^{-1}$ est un automorphisme (intérieur) donc la famille libre $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est transformée en une famille libre et finalement

$$\boxed{\dim(\mathcal{C}(A)) = 3}\ .$$

7. Le polynôme caractéristique de $A$ est scindé à racines simples donc c'est aussi le polynôme minimal, ce qui signifie que $A$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à 3, donc

   la condition $\alpha\, I_3 + \beta\, A + \gamma\, A^2 = 0$ entraine $\alpha = \beta = \gamma = 0$ :

   la famille $(I_3, A, A^2)$ est libre donc $\dim(F) = 3$ et avec $F \subset \mathcal{C}(A)$ on a

   $$\boxed{F = \mathcal{C}(A)}\ .$$

8. On pourrait faire : avec le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_A(A) = 0$ et avec $\chi_A = X^3 + 4\,X^2 + 3\,X$ on obtient $A^3 = -4\,A^2 - 3\,A \in F$.

   Ici, avec tout ce qui précède on peut dire $\boxed{A^3 \in \mathcal{C}(A) = F}$.

# Corrigé - e3a - MP - 2019 - Mathématiques 2

## Partie I

**1.**

**1.1** Question de cours

**1.2** Question de cours

**1.3** Question de cours

**2.**

**2.1** D'après le cours, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, elle est diagonalisable et $\boxed{\text{il existe une matrice } C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } C^{-1}AC = D \text{ où } D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).}$

**2.2** On montre alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = CD^kC^{-1}$ et comme deux matrices semblables ont même trace, $\mathbf{tr}(A^k) = \mathbf{tr}(D^k)$. Or $\mathbf{tr}(D^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ et donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{tr}(A^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k.}$

## Partie II

**1.** $(X-a)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-1-k}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-k} - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{k+1} X^{m-1-k}$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-k} - \sum_{l=1}^{m} \alpha^l X^{m-l}$ (changement d'indice $l = k+1$ dans la deuxième somme)

$= X^m - \alpha^m$

On a donc : $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } m \geq 1,\ X^m - a^m = (X-a)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-1-k}\right).}$

**2.** $Q(X) = b_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$.

Par dérivation d'un produit, on obtient : $Q'(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} (X - \alpha_k) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(X)$.

On a donc $\boxed{Q' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q_i.}$

**3.** $Q_i(X) = \dfrac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i} = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k - \sum_{k=0}^{n} b_k \alpha_i^k}{X - \alpha_i} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{X^k - \alpha_i^k}{X - \alpha_i}$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{X^k - \alpha_i^k}{X - \alpha_i}$ (car le terme d'indice 0 est nul)

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=0}^{k-1} X^j \alpha_i^{k-j-1}$ (en utilisant la question **1.**)

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{r=1}^{k} X^{r-1} \alpha_i^{k-r}$ (changement d'indice $r = j+1$)

$= \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \sum_{k=r}^{n} b_k X^{r-1} \alpha_i^{k-r}$ (permutation des deux $\sum$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k} a_{kr} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=r}^{n} a_{kr}$)

$= \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k \alpha_i^{k-r}\right) X^{r-1}$

On a donc : $\boxed{Q_i(X) = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k \alpha_i^{k-r}\right) X^{r-1}}$

**4.** D'après les questions **2** et **3**, on a :

$Q'(X) = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} r b_r X^{r-1}$ et

$$Q'(X) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k \alpha_i^{k-r}\right) X^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{k-r}\right)\right) X^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k T_{k-r}\right) X^{r-1}$$

En identifiant les coefficients du polynôme $Q'$, on obtient pour tout $r \in [\![1, n]\!]$ :

$$rb_r = \sum_{k=r}^{n} b_k T_{k-r}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j \text{ (changement d'indice } j = k - r)$$

On a donc : $\boxed{\forall r \in [\![1, n]\!],\ rb_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j.}$

**5.** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $r = n - k$. $r \in [\![1, n-1]\!]$.

D'après la question précédente :

$$(n-k)b_{n-k} = rb_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j = \sum_{j=0}^{k} b_{n-k+j} T_j = \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j + b_n T_k.$$

Donc $b_n T_k = (n-k)b_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j$, or $Q$ est de degré exactement $n$ et donc $b_n \neq 0$

et : $\boxed{T_k = \frac{1}{b_n}\left((n-k)b_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j\right).}$

**6.**

**6.1** Soit $k \geq n$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\alpha_i) = 0$. Donc :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} Q(\alpha_i)\alpha_i^{k-n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \alpha_i^j\right)\alpha_i^{k-n} = \sum_{j=0}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{k-n+j}\right) = \sum_{j=0}^{n} b_j T_{k-n+j}$$

On a donc : $\boxed{\sum_{j=0}^{n} b_j T_{k-n+j} = 0.}$

**6.2** D'après la question précédente, $0 = \sum_{j=0}^{n-1} b_j T_{k-n+j} + b_n T_k$ et donc, comme $b_n \neq 0$ :

$$\boxed{T_k = -\frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{n-1} b_j T_{k-n+j}.}$$

**7.** $\boxed{\text{On peut donc calculer les termes de la suite } (T_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ à partir des coefficients du polynôme } Q.}$

## Partie III

**1.** Le système $(\Sigma)$ peut se réécrire : $\begin{cases} u_1 = -S_1 \\ u_1 S_1 + 2u_2 = -S_2 \\ u_1 S_2 + u_2 S_1 + 3u_3 = -S_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_1 S_{n-1} + u_2 S_{n-2} + \cdots + u_{n-1} S_1 + n u_n = -S_n \end{cases}$

Sa matrice est triangulaire inférieure, les éléments diagonaux sont $1, 2, \cdots, n$, non nuls, la matrice est donc inversible et donc: $\boxed{\text{Le système } (\Sigma) \text{ possède une unique solution dans } \mathbb{R}^n.}$

**2.** $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

Les relations coefficients racines donnent :

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -S_1 \text{ et } a_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right) = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2).$$

Du système $(\Sigma)$, on tire $u_1 = -S_1 = a_{n-1}$ et $u_2 = \frac{1}{2}(-u_1 S_1 - S_2) = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2) = a_{n-2}$ et donc :

$\boxed{u_1 = a_{n-1} \text{ et } u_2 = a_{n-2}.}$

**3.** Dans la partie **II**, on a $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)=\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{b_n}X^k$ et $T_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k$ et en **II.4.** on a montré que :

$\forall r\in[\![1,n]\!],\ rb_r=\displaystyle\sum_{j=0}^{n-r}b_{r+j}T_j.$

En remplaçant $\alpha_i$ par $\lambda_i$ et $T_i$ par $S_i$ (en posant $S_0=n$) et en posant $a_k=\dfrac{b_k}{b_n}$ on obtient :

$\forall r\in[\![1,n]\!],\ ra_r=\displaystyle\sum_{j=0}^{n-r}a_{r+j}S_j.$

On pose alors $k=n-r$ : $\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ (n-k)a_{n-k}=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}a_{n-k+j}S_j.$

(pour $k=0$, la relation est sans intéret)

Or $a_n=1$ et $S_0=n$, donc : $\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ (n-k)a_{n-k}=\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}a_{n-k+j}S_j+na_{n-k}+S_k$

et $\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ 0=S_k+\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}a_{n-k+j}S_j+ka_{n-k}$

Pour $k=1$, on obtient $S_1+a_{n-1}=0$.
Pour $k\in[\![2,n-1]\!]$, on obtient $0=S_k+a_{n-1}S_{k-1}+a_{n-2}S_{k-2}+\cdots+a_{n-k+1}S_1+ka_{n-k}$.

$\boxed{(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0)\text{ est donc bien solution du système }(\Sigma).}$

**4.** On a vu en **1.** que $(\Sigma)$ possède une unique solution. $(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0)$ et $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ sont solutions de $(\Sigma)$ donc : $\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=a_{n-k}.}$

## Partie IV

**1.** $P$ est le polynôme caractéristique de la matrice $A$. D'après le théorème ce Cayley Hamilton, on a donc : $\boxed{P(A)=O_n.}$

**2.** $a_0=P(0)=(-1)^n\det(A)$ (terme constant du polynôme caractéristique).

Donc : $\boxed{A\text{ inversible}\iff a_0\neq 0.}$

**3.** $P(A)=O_n$ donc $A^n+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_kA^k=0$ ce que l'on peut réécrire : $A\left(A^{n-1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_kA^{k-1}\right)+a_0I_n=0$

Si $a_0\neq 0$, alors $A^{-1}=-\dfrac{1}{a_0}\left(A^{n-1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_kA^{k-1}\right)$ et donc :

$\boxed{\text{La matrice }A^{-1}\text{, si elle existe, s'écrit comme un polynôme en }A.}$

**4.**

**4.1** Montrons par récurrence que l'on a $\forall k\in[\![1,n]\!],\ B_k=A^k+\displaystyle\sum_{i=1}^{k}d_iA^{k-i}$.

- Pour $k=1$, $B_1=A+d_1I_n$, la relation est donc vraie.
- Supposons que pour un entier $k\geq 1$ donné, $B_k=A^k+\displaystyle\sum_{i=1}^{k}d_iA^{k-i}$

  Par définition : $B_{k+1}=B_kA+d_{k+1}I_n$. On a donc :

  $B_{k+1}=\left(A^k+\displaystyle\sum_{i=1}^{k}d_iA^{k-i}\right)A+d_{k+1}I_n=A^{k+1}+\displaystyle\sum_{i=1}^{k}d_iA^{k+1-i}+d_{k+1}I_n=A^{k+1}+\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}d_iA^{k+1-i}$
- D'après le principe de récurrence, la relation est donc vraie pour tout $k\geq 1$

On a bien : $\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\ B_k=A^k+\displaystyle\sum_{i=1}^{k}d_iA^{k-i}.}$

**4.2** $\forall k\in[\![2,n]\!],\ d_k=-\dfrac{1}{k}\mathbf{tr}(B_{k-1}A)=-\dfrac{1}{k}\mathbf{tr}\left(\left(A^{k-1}+\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}d_iA^{k-1-i}\right)A\right)=-\dfrac{1}{k}\mathbf{tr}\left(A^k+\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}d_iA^{k-i}\right)$

$=-\dfrac{1}{k}\left(\mathbf{tr}(A^k)+\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}d_i\mathbf{tr}(A^{k-i})\right)$ (linéarité de la trace)

On a donc : $\boxed{\forall k\in[\![2,n]\!],\ d_k=-\dfrac{1}{k}\left(\mathbf{tr}(A^k)+\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}d_i\mathbf{tr}(A^{k-i})\right).}$

**4.3**

**4.3a** D'après la question **I.2.2** $\mathbf{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = S_k$.

On a donc $S_1 + d_1 = 0$ par définition de $(d_k)$ et la formule trouvée à la question précédente peut se réécrire : $\forall k \in [\![2, n]\!], \quad S_k + d_1 S_{k-1} + d_2 S_{k-2} + \cdots + d_{k-1} S_1 + k d_k = 0$.
$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ est donc solution du système $(\Sigma)$ et par unicité de la solution de $(\Sigma)$,
on a donc : $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ d_k = a_{n-k}.}$

**4.3b** $B_{n-1} = A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} d_i A^{n-1-i} = A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} A^{n-1-i} = A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1}$. (changement d'indice $k = n - i$)

En utilisant la formule trouvée en **IV.3.**, on obtient : $\boxed{B_{n-1} = -a_0 A^{-1} = (-1)^{n+1} \det(A) A^{-1}.}$

**4.3c** $B_n = A^n + \sum_{i=1}^{n} d_i A^{n-i} = A^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} A^{n-i} = P(A) = O_n$ (Car $P$ est le polynôme caractéristique de $A$). On a donc $\boxed{B_n = O_n.}$

**5.** Calculons $d_1$, $d_2$, $d_3$ et $d_4$ les coefficients du polynôme caractéristique de $A$.

$$a_3 = d_1 = -\mathbf{tr}(A) = -1,\ B_1 = A + d_1 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_2 = d_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{tr}(B_1 A) = -7,\ B_2 = B_1 A + d_2 I_4 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$a_1 = d_3 = -\frac{1}{3}\mathbf{tr}(B_2 A) = 1,\ B_3 = B_2 A + d_3 I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_0 = d_4 = -\frac{1}{4}\mathbf{tr}(B_3 A) = 8.$$

$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } A \text{ est donc } X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 8.}$

$$B_3 = -a_0 A^{-1} \text{ donc } \boxed{A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

**6.** **6.1** `fonction1` prend en argument deux matrices carrées $A$ et $B$ et retourne leur produit $AB$.
`fonction2` prend en argument un réel $x$ et un entier $n$ et retourne la matrice $xI_n$.
`fonction3` prend en argument une matrice carrée $A$ et retourne $\mathbf{tr}(A)$.
`fonction4` prend en argument une matrice carrée $A$ et un réel $x$ et retourne la matrice $xA$.
`fonction5` prend en argument deux matrices carrées $A$ et $B$ et retourne leur somme $A + B$.

**6.2**

```
d=[1]
A=[[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
n=len(A)
dk=-fonction3(A)
B=fonction5(A,fonction2(dk,n))
d.append(dk)
for k in range(2,n+1):
    C=fonction1(B,A)
    dk=-1/k*fonction3(C)
    B=fonction5(C,fonction2(dk,n))
    d.append(dk)
print("Les coefficients du polynôme caractéristique, dans l'ordre décroissants
      des puissances sont :",d
```