Contrôle N° 2 (2 heures)

Algèbre Linéaire

Exercice 1 : **e3a 2020 MP**

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E.
On définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall x \in \mathscr{C},\ S(x) = z,\ \text{avec}\quad \forall n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall x \in \mathscr{C},\ T(x) = y,\ \text{avec}\quad \forall n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}.$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.

4. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même de S.

5. Soient $F = \{x \in \mathscr{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.

6. Étude de l'endomorphisme S
Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

7. Étude de l'endomorphisme T
On rappelle qu'une suite x est dans $\mathscr{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

7.1. Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda\ \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ où $0_{\mathscr{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{C}$.
On pourra utiliser les questions de cours.

7.2. L'endomorphisme T est-il injectif ?

7.3. Déterminer $\mathrm{Ker}(T - 2\ \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $\mathrm{Ker}(T + 2\ \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.

Exercice 2 : **2021 - E3A - MP - Mathématiques Unique**

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ.**

   2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   2.2. Déterminer $\operatorname{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$

   3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.

   3.2. Démontrer que $\operatorname{Im}(\psi) = \operatorname{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$.

   3.3. Démontrer que : $P \in \operatorname{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \operatorname{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.

   3.4. Donner alors une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

   4.1. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

   4.2. Pour $k \in [|0, n|]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

   4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Corrigé

Exercice 1 : **e3a 2020 MP**

1. La suite $\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(-n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathscr{C}$

2.
- $\mathscr{C}$ est une partie non vide de E (contient la suite précédente).
- Soit $(x,x')\in\mathscr{C}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $y=\alpha x+\beta x'$ et on note x_n,x'_n,y_n les termes généraux des suites x,x',y'.
  On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, y_n=\alpha x_n+\beta x'_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, y_n=\alpha x_n+\beta x'_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}, y_{-n}=\alpha x_{-n}+\beta x'_{-n}$.
  Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Comme les suites $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x'_{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.
  Ainsi $y\in\mathscr{C}$. Et donc $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{\mathscr{C} \text{ est un sous-espace de } E}$

3. Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathscr{C}$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $A>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_n|\leqslant A$.
De même, la suite $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $B>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_{-n}|\leqslant B$.
On pose alors $C=\max(A,B)$, et on a : $\forall n\in\mathbb{Z}, |x_n|\leqslant C$: la suite x est bornée.
Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathscr{C} \text{ est bornée}}$

4. Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathscr{C}$. Soit $y=T(x)=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, y_n=x_{n-1}+x_{n+1}$. Ainsi :
- $\forall n\in\mathbb{N}^*, y_n=x_{n-1}+x_{n+1}$ donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui sont extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc qui convergent. Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donc, comme la convergence d'une suite ne dépend pas des premiers termes, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- De même $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Ainsi $y\in\mathscr{C}$.
On en déduit que T est une application de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$.
Montrons la linéarité. Soit $(x,x')\in\mathscr{C}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $y=T(x)$, $y'=T(x')$, $z=\alpha x+\beta x'$, et $w=T(z)$ et $v=\alpha y+\beta y'$. On doit établir : $T(\alpha x+\beta x')=\alpha T(x)+\beta T(x')$ i.e. $v=w$. On note $x_n,x'_n,y_n,y'_n,z_n,w_n,v_n$ les termes généraux des suites x,x',y,y',z,w,v. On a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$:
$v_n=\alpha y_n+\beta y'_n=\alpha\left(x_{n-1}+x_{n+1}\right)+\beta\left(x'_{n-1}+x'_{n+1}\right)=\left(\alpha x_{n-1}+\beta x'_{n-1}\right)+\left(\alpha x_{n+1}+\beta x'_{n+1}\right)$. Or dans ces derniers termes on reconnaît $z_{n-1}+z_{n+1}=w_n$. Donc $v=w$.
Ainsi T est bien une application linéaire de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$ i.e. $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}}$

5.
- Méthode 1. On a clairement $S\circ S=\mathrm{id}_E=\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de $\mathscr{C}$, on en déduit que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ et donc son axe, $\ker\left(S-\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\right)$, et sa direction, $\ker\left(S+\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\right)$, sont supplémentaires dans $\mathscr{C}$.
  Or on a tout aussi clairement $F=\{x\in\mathscr{C};\forall n\in\mathbb{Z}, x_n=x_{-n}\}=\{x\in\mathscr{C}; S(x)=x\}=\ker\left(S-\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\right)$ et $G=\ker\left(S+\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\right)$, donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires dans } \mathscr{C}}$
- Méthode 2. On a $F=\ker\left(S-\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\right)$ et $G=\ker\left(S+\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\right)$ donc ce sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$, propres pour l'endomorphisme S, associés à des valeurs propres différentes : 1 et -1. Donc F et G sont en somme directe

i.e. $F+G=F\oplus G$.
De plus, si $x\in\mathscr{C}$, $x'=\dfrac{1}{2}(x+S(x))$ et $x''=\dfrac{1}{2}(x-S(x))$, on montre aisément $x=x'+x''$, $x'\in F$ et $x''\in G$, donc tout élément de S s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc comme ce sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$, on a $\mathscr{C}=F+G$.
Ainsi par caractérisation des sous-espaces supplémentaires, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{C}}$

6. En reprenant ce qui a été fait dans la méthode 1 dans la question précédente, on a :
$\boxed{S \text{ symétrie d'axe } F \text{ et de direction } G}$

7. .

7.1. Si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$. Soit $x\in\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, x_{n-1}+x_{n+1}=\lambda x_n$. En particulier : $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+2}-\lambda x_{n+1}+x_n=0$ et, en posant $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n\in\mathbb{N}, x'_{n+2}-\lambda x'_{n+1}+x'_n=0$. On considère donc l'équation caractéristique $\mathcal{C}$ de ces suites récurrentes linéaires doubles : $X^2-\lambda X+1=0$ dont le discriminant est $\Delta=\lambda^2-4$ donc est non nul car λ est différent de 2 et de -2

- Si $\Delta>0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont réelles, distinctes et de produit 1. Donc l'une d'entre elles est de module strictement supérieur à 1 et l'autre est son inverse. On note r la racine de module strictement supérieur à 1.
  D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles, On a l'existence de 4 réels A,B,C,D tels que : $\forall n\in\mathbb{N}, x_n=Ar^n+\dfrac{B}{r^n}$ et $x'_n=Cr^n+\dfrac{D}{r^n}$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc $A=0=C$. De plus $x_0=x'_0$ donc $B=D$. Enfin $x'_1+x_1=\lambda x_0$ donc $(\lambda-2r)B=0$. Or les racines de $\mathcal{C}$ sont $\dfrac{\lambda\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ donc $|\lambda-2r|=\sqrt{\Delta}\neq 0$. Ainsi $B=D=0$ et donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})\subset\{0_{\mathscr{C}}\}$
  S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=\{0_{\mathscr{C}}\}$
- Si $\Delta<0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont complexes non réelles et conjugués distinctes et de produit 1. Donc elles sont de module 1 et on peut les écrire sous la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta\in]0,2\pi[$.
  D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles réelles, On a l'existence de 4 réels A,B,α,β tels que : $\forall n\in\mathbb{N}, x_n=A(\cos(n\theta+\alpha))$ et $x'_n=B(\cos(n\theta+\beta))$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors que les suites $(\cos(n\theta+\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta+\beta))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent [1] car θ n'est pas un multiple de 2π donc $A=0=B$. Donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})\subset\{0_{\mathscr{C}}\}$
  S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=\{0_{\mathscr{C}}\}$

Ainsi si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$, $\boxed{\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=\{0_{\mathscr{C}}\}}$

7.2. On applique le résultat précédent avec $\lambda=0$. On a $\ker(T)=\{0_{\mathscr{C}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $\boxed{T \text{ est injectif}}$

7.3.
- Si $\lambda=2$. Soit $x\in\ker(T-2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : 1, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{Z}, x_n=A+Bn$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $B=0$ et donc x est une suite constante.
  Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\ker(T-2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.
  Ainsi $\boxed{\ker(T-2\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$
- Si $\lambda=-2$. Soit $x\in\ker(T+2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, x_{n+2}+2x_{n+1}+x_n=0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : -1, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{Z}, x_n=(A+Bn)(-1)^n$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $B=0$ et, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $A=0$ donc x est la suite nulle.
  Ainsi $\boxed{\ker(T+2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=\{0_{\mathscr{C}}\}}$

Exercice 2 : $\boxed{\textbf{2021 - E3A - MP - Mathématiques Unique}}$

1. Notons $P_0 = 1$ et pour $k > 0$, $P_k = X^{k-1}(X-1)$. Alors $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(P_k) = k$ donc $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes à degrés successifs donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. 1. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors, d'après la linéarité de l'intégrale,

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \int_0^1 (\lambda P(t) + \mu Q(t))dt = \lambda \int_0^1 P(t)dt + \mu \int_0^1 Q(t)dt = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$$

Donc φ est linéaire et comme de plus $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ alors $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$.

2.2. Comme $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.
Or $1 = \varphi(1) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}}$.
D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n + 1 - \dim(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n}$.

3. 1. Soient $(P, R) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors, d'après la linéarité de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda P + \mu R)(x) = \int_0^x (\lambda P(t) + \mu Q(t))dt = \lambda \int_0^x P(t)dt + \mu \int_0^x R(t)dt = \lambda\psi(P)(x) + \mu\psi(Q)(x)$$

Donc $\psi(\lambda P + \mu R) = \lambda\psi(P) + \mu\psi(Q)$ donc $\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$.

3.2 $\mathrm{Im}(\psi) = \psi(\mathbb{R}_n[X]) = \psi(\mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)) = \mathrm{Vect}(\psi(1), \psi(X), \dots, \psi(X^n)) = \mathrm{Vect}\left(X, \dfrac{X^2}{2}, \dots, \dfrac{X^{n+1}}{n+1}\right)$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})}$.

3.3 Notons que $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)dt = 0 \Leftrightarrow \psi(P)(1) = 0 \Leftrightarrow (X-1)|\psi(P)$.
Or, d'après la question précédente $Q \in \mathrm{Im}(\psi) \Leftrightarrow X|Q$ et $\deg(Q) \leq n+1$,
donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow X(X-1)|\psi(P)$ et $\deg(\psi(P)) \leq n+1 \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \psi(P) = RX(X-1)$.

Donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \exists (b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \psi(P) = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j\right) X(X-1) \underset{k=j+1}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{k-1}X^k(X-1)$

Donc $\boxed{P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))}$.

3.4 Comme $\psi(P)(x) = \int_0^x P(t)dt$, en dérivant on obtient $(\psi(P))'(x) = P(x)$. Donc

$$\begin{aligned}
\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1)) \quad &\Rightarrow \quad \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n,\ \psi(P) = \sum_{k=1}^{n} c_k X^k(X-1) \\
&\Rightarrow \quad \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n,\ \psi(P)' = \sum_{k=1}^{n} c_k((k+1)X^k - kX^{k-1}) \\
&\Rightarrow \quad \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n,\ P = \sum_{k=1}^{n} c_k((k+1)X^k - kX^{k-1})
\end{aligned}$$

Donc, d'après la question précédente,
$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow P \in \mathrm{Vect}(2X-1, 3X^2-2X, \dots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$. donc
$\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(2X-1, \dots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$. Notons $\mathcal{C} = (2X-1, \dots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$.
D'après la question 2.2., $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n = \mathrm{Card}(\mathcal{C}) \geq \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{C}))$.
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathcal{C}) = \mathrm{Vect}(2X-1, \dots, (n+1)X^n - nX^{n-1})}$.

4. 1. $\boxed{\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \dim(\mathbb{R}) = n+1}$.

4.2. Tout d'abord on constate que les ψ_k sont dans $\mathcal{H}$.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k = 0$.

Si $j < k$, $(X^j)^{(k)} = 0$ et si $j \geq k$, $(X^j)^{(k)} = \dfrac{j!}{(j-k)!} X^{j-k}$ donc $\psi_k(X^j) = 0$ si $j \neq k$ et $\psi_k(X^k) = 1$.

Soit $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j X^j$ alors notons que $\psi_k(P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \psi_k(X^j) = \lambda_k$ donc

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k\right)(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k(P) = \sum_{k} \lambda_k^2$$

Donc, comme une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls alors $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Donc $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une famille libre de $\mathcal{H}$.

Et comme, d'après la question précédente, $\mathrm{Card}(\psi_0, \dots, \psi_n) = n+1 = \dim(\mathcal{H})$ alors $\boxed{(\psi_0, \dots, \psi_n) \text{ est une base de } \mathcal{H}}$.

4.3. D'après la question précédente, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $\psi_k(P) = a_k$ donc

$$\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_k(P)}{k+1}$$

Donc $\boxed{\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_k}{k+1}}$.