Simulation Contrôle N° 2 (2 heures)

Algèbre Linéaire

Exercice 1 : e3a MP, 2017

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}-$ algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.

Étant donné un entier naturel n, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.

Partie I.

Soit φ l'application :

$$\varphi \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que :
   (a) $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$,
   (b) $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :
$$(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{Id}$$
7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Exercice 2 : e3a MP, 2014

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u, et $\mathrm{Im}(u)$ l'image de u.

1. Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(u)$.

3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.

4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.

   (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.

   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.

      i. Démontrer que $v(D) \subset D$.

      ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.

   (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.

5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, ..., u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

   On pose $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.

   (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1}.

   (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.

   (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m = 0$.

6. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $<\ ,\ >$ usuel.

Corrigé

Exercice 1 : e3a MP, 2017

1. **Endormorphisme**
   - Il est clair que $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   - φ linéaire : on voit facilement que $\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda \mathrm{P}+\mathrm{Q}) = \lambda\varphi(\mathrm{P})+\varphi(\mathrm{Q})$.

   Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   Satabilité Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Montrons $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

   On a $\deg \mathrm{P} \leqslant n$ donc $\deg(\mathrm{P}') \leqslant n$

   Ainsi $\deg(\mathrm{P}-\mathrm{P}') = \deg(\varphi(\mathrm{P})) \leqslant n$ d'où le résultat

   Ainsi $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ stable par φ.

   On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ induit sur } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ un endomorphisme}}$

2. $$\boxed{\text{La matrice de } \varphi_n \text{ sur la base canonique de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ est : } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})}$$

4. À l'aide de la matrice de φ_n, on trouve que $\det(\varphi_n) = 1 \neq 0$

   ainsi $\boxed{\varphi_n \text{ est un automorphisme de l'espace de dimension finie } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$

5. Comme φ est un automorphisme, on a pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$,
   $$\varphi_n(x) = \frac{\mathrm{X}^i}{i!} \text{ si et seulement si } x = \varphi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)$$
   ceci nous donne l'existence et l'unicité de $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{\mathrm{X}^i}{i!}$

   De plus $\left(\frac{\mathrm{X}^0}{0!}, \frac{\mathrm{X}^1}{1!}, \ldots, \frac{\mathrm{X}^n}{n!}\right)$ est une famille échelonnée donc libre constituée de $n+1$ vecteurs

   comme $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$, alors $\left(\frac{\mathrm{X}^0}{0!}, \frac{\mathrm{X}^1}{1!}, \ldots, \frac{\mathrm{X}^n}{n!}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$

   l'image d'une base par l'automorphisme φ_n^{-1} étant une base, on en déduit que

   > il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que :
   > (a) $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{\mathrm{X}^i}{i!}$,
   > (b) $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

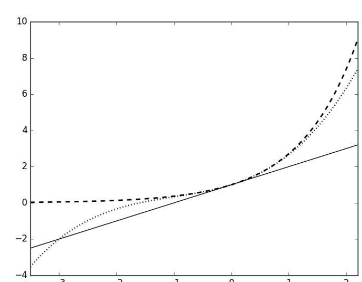
6. On a $(\mathrm{Id}-\delta)\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)-(\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n+1})=\mathrm{Id}-\delta^{n+1}$
   Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
   Par récurrence immédiate, on a : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\deg\left(\delta^k(\mathrm{P})\right)\leqslant -k+\deg\mathrm{P}$
   donc $\deg\left(\delta^{n+1}(\mathrm{P})\right)\leqslant -1$ et ainsi $\left(\delta^{n+1}(\mathrm{P})\right)=0$
   on a donc bien $\boxed{(\mathrm{Id}-\delta)\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=\mathrm{Id}}$
7. On déduit de la question précédente que $\varphi_n\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=\mathrm{Id}$
   Comme φ_n est endomorphisme d'un espace de dimension finie alors $\varphi_n^{-1}=\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n$
   donc pour i dans $[\![0,n]\!]$, on a $s_i=\varphi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^i)\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)$
   On en déduit $\boxed{s_i=1+\dfrac{\mathrm{X}}{1!}+\cdots\dfrac{\mathrm{X}^i}{i!}=\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\frac{\mathrm{X}^j}{j!}}$

Partie II.

On obtient les limites des fonctions polynomiales en $\pm\infty$ à l'aide des termes de plus haut degré.

8. On a $\mathrm{S}_3'=\mathrm{S}_2=1+\mathrm{X}+\dfrac{\mathrm{X}^2}{2}$ dont le discriminant vaut -1.
   Soit $x\in\mathbb{R}$.
   Par inégalité de convexité : $\mathrm{S}_1(x)=1+x\leqslant \mathrm{e}^x$ et par habitude : $\mathrm{S}_1(x)=\mathrm{e}^x\iff x=0$
   On a $\mathrm{S}_3(x)-\mathrm{S}_1(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}=\dfrac{x^2}{6}(3+x)$
   donc $\boxed{(\mathrm{S}_3(x)=\mathrm{S}_1(x)\iff x=0 \text{ ou } x=-3) \text{ et } (\mathrm{S}_3(x)<\mathrm{S}_1(x)\iff x<-3)}$
   Étudions $\varphi=\exp-\mathrm{S}_3$, on a $\varphi'=\exp-\mathrm{S}_2$ et $\varphi''=\exp-\mathrm{S}_1$ qui est positive avec un seul point d'annulation
   donc φ' est strictement croissante et $\varphi'(0)=0$ donc φ' est du signe (strict) de x
   donc φ est strictement décroissante (respectivement croissante) sur $]-\infty,0]$ (respectivement sur $[0,+\infty[$)
   donc $\boxed{\exp(x)\geqslant \mathrm{S}_3(x) \text{ et } \exp(x)\geqslant \mathrm{S}_1(x) \text{ avec égalités si et seulement si } x=0}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\mathrm{S}_3'(x)$	$+$
S_3	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



9. On va montrer par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$:
   « S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. »

   Initialisation : Pour $n\in\{0,1\}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée facilement.

   Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, on ait $\mathcal{P}_p$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$.

   Si $n+1$ est impair, alors n est pair
   Dans ce cas S_n ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ par hypothèse et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{S}_n(x)=+\infty$
   par le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{S}_{n+1}'(x)=\mathrm{S}_n(x)>0$ car S_n est continue sur $\mathbb{R}$
   donc S_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{S}_{n+1}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{S}_{n+1}(x)=-\infty$
   La fonction S_{n+1} étant continue, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle admet alors une unique racine.
   Comme S_{n+1}' n'admet pas de racine réelle, la seule racine de S_{n+1} est simple.

Exercice 2 : e3a MP, 2014

1) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
Soit $x \in \ker(u)$. $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $v(x) \in \ker(u)$.
$\ker(u)$ est stable par v.

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $v(x) = v(u(y)) = u(v(y))$ donc $v(x) \in \mathrm{Im}(u)$.
$\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

2)Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $u(x) = u^2(y) = 0$ donc $x \in \ker(u)$.
$\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.

3) On en déduit que $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(\ker(u)$. Par le théorème du rang, on obtient $\mathrm{rg}(u) \leq \dfrac{n}{2}$.

2)
a)Si $n = 2$ et $u \neq 0$, (3) conduit à $\mathrm{rg}(u) = 1 = \dim(\ker(u))$.
Alors $D = \ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ est une droite
b)
(i) Soit v telle que $u \circ v = v \circ u$ et $v^2 = 0$. Par (1) on sait que $D = \mathrm{Im}(u)$ est stable par v.
(ii) D est donc propre pour v. Or $\mathrm{sp}(v) = \{0\}$.
Donc $v = 0$ ou $D = \ker(v) = \mathrm{Im}(v)$. Dans les deux cas $u \circ v = 0$.
c) De même, on a $w = 0$ ou $D = \ker(w) = \mathrm{Im}(w)$. Dans les deux cas $v \circ w = 0$.
5)
a)Posons, pour $1 \leq i \leq m-1$, $v = u_1 \circ \cdots \circ u_i$. v et u_{i+1} commutent, donc par (1), F_i est stable par u_{i+1}.
b) On effectue une récurrence sur i :
$(H_i)\, \dim(F_i) \leq \dfrac{n}{2^i}$.
(H_1) est obtenu par (3).
Supposons (H_{i_0}) pour $i_0 \geq 1$. Soit $\tilde{u}_{i_0+1}$ le morphisme induit par u_{i_0+1} sur F_{i_0}. $\tilde{u}_{i_0+1}^2 = 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence et le résultat du (3), on déduit $\mathrm{rg}(\tilde{u}_{i_0+1}) \leq \dfrac{n}{2^{i_0+1}}$. Or $\mathrm{Im}(\tilde{u}_{i_0+1}) = F_{i_0+1}$ car les (u_i) commutent. D'où (H_{i_0+1}). Ceci achève la récurrence.
c) Si $n < 2^m$, $\dim F_m < 1$ donc $\dim F_m = 0$. Ainsi $u_1 \circ \cdots \circ u_m = 0$.