PRÉPAS ELBILIA

Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُومُنِي مُولَاي اسْمَاعِيل

Contrôle n° 4 : Préhilbertiens

Durée : 2 heures

AVERTISSEMENT

L'usage de calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème : e3a MP, 2021

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\ |\ )$ et la norme $\|\ \|$.
On note Id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose non inversible et non nul.
   1.1. Citer le **théorème spectral.**
   1.2. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.
   1.3. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
   Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

   On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j\in[|0,k|]}$ avec :

$$k \geq 1, \quad \lambda_0 = 0 \text{ et } 0 < |\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_k|.$$

   Pour tout $j \in [|0,k|]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

   1.4. Montrer que $\mathrm{Id}_E = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.

1.5. Prouver que l'on a pour tout couple (i,j) de $[|0,k|]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

1.6. Démontrer que : $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j$.

1.7. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

2. **Quelques propriétés de l'inverse généralisé.**

2.1. Montrer que l'on a : $f \circ f^I = p$.
En déduire que : $\forall (x,y) \in E^2, \Big(f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f) \Big)$.

2.2. Soit y un vecteur de E.
Montrer que l'on a : $\forall x \in E, \ \Big(\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f) \Big)$.

3. **Application à un exemple.**
On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique, non nul et non inversible.

3.2. Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A.

3.3. En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
On note pour tout $j \in [|0,2|]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathcal{B}$.

3.4. Justifier que l'on peut écrire A sous la forme : $A = 2M_1 + 4M_2$.

3.5. Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.

3.6. Démontrer que : $\forall x \in E, p_2(x) = (x|v_2)v_2$.

3.7. Déterminer la matrice M_2.

4. En déduire la matrice associée à f^I relativement à la base $\mathcal{B}$.

Corrigé

1. 1. Théorème spectral : Si f est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E alors il est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

1.2. Comme f est non inversible alors $\chi_f(0) = \det(0-f) = (-1)^n \det(f) = 0$ donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$
Si f n'admet que 0 comme valeur propre, alors comme f symétrique dans un espace vectoriel euclidien, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Comme les coefficients diagonaux de la matrice diagonale sont les valeurs propres de f, elle est nulle donc f est nul. Contradiction avec l'énoncé donc $\boxed{f \text{ admet une valeur propre non nulle}}$.

1.3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) = 0$ et $\exists z \in E,\ f(z) = y$. Comme f est symétrique :

$$(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0|z) = 0$$

Donc $\forall x \in \mathrm{Ker}(f)$, $\forall y \in \mathrm{Im}(f)$, $x \perp y$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont orthogonaux}}$.
Comme ils sont orthogonaux, ils sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

1.4. Comme f est diagonalisable d'après la question 1.2., $\bigoplus_{i=0}^{k} E_i = E$. Donc

$\forall x \in E$, $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\exists ! x_i \in E_i$, $x = \sum_{i=0}^{k} x_i$. De plus les E_i sont orthogonaux deux à deux car f est symétrique donc $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\sum_{j \neq i, j=0}^{k} x_j \in E_i^{\perp}$ et comme $x_i \in E_i$ et $x = x_i + \sum_{j \neq i, j=0}^{k} x_j$ alors d'après la définition de p_i, $p_i(x) = x_i$. Et donc $\forall x \in E$, $\sum_{i=0}^{k} p_i(x) = \sum_{i=0}^{k} x_i = x$. Donc $\boxed{\sum_{i=0}^{k} p_i = id_E}$.

1.5. Soit $x \in E$, alors, avec les notations de la question précédente, $p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j)$. or $x_j \in E_j$ donc, comme $i \neq j$ et donc $E_i \perp E_j$, $x_j \in E_i^\perp$ donc $p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j) = 0$ donc $\boxed{\forall (i,j) \in \{0, \ldots, k\}^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } p_i \circ p_j = 0}$.

1.6. Toujours avec les notations des questions précédentes, $\forall x \in E$,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i(x)$$

Donc $\boxed{f = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i}$.

1.7. Comme $E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$ d'après la question 1.3. alors d'après la question 1.4., $\forall x \in E$, $x_0 \in E_0 = \mathrm{Im}(f)^\perp$ et $\sum_{i=1}^{k} x_i \in E_0^\perp = \mathrm{Im}(f)$ donc $p(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$. Donc $\boxed{p = \sum_{i=1}^{k} p_i}$.

2. 1. Soit $x \in E$,

$$f \circ f^I(x) = f \circ f^I\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} p_i(x)\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i = p(x)$$

Donc $\boxed{f \circ f^I = p}$. Donc

$$f(x) = p(y) \Leftrightarrow f(x) - f \circ f^I(y) = 0 \Leftrightarrow f(x - f^I(y)) = 0 \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)$$

Donc $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)}$.

2.2. Comme $\mathrm{Im}(f) = \{f(z), z \in E\}$ alors $\inf\limits_{z \in E} \|f(z) - y\| = d(y, \mathrm{Im}(f))$. Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, la borne inférieure est un minimum qui est atteint uniquement quand $f(z)$ est le projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Im}(f)$ donc

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow f(x) = p(y)$$

Donc d'après la question précédente, $\boxed{\forall x \in E,\ \left(\|f(x) - y\| = \inf\limits_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\right)}$.

3. 1. Comme la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique, $\boxed{f \text{ est symétrique}}$.
Comme $A \neq 0$ alors $\boxed{f \text{ est non nul}}$.
Comme les deuxième et quatrième colonnes de A sont opposées, $\mathrm{rg}(A) < 4$ et donc A n'est pas inversible. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas inversible}}$.

3.2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_2}{=}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ \lambda - 2 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
& \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_4}{=}} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
& = \lambda(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{2 \text{ est valeur propre double de la matrice } A}$

3.3. D'après la question précédente $\boxed{A \text{ admet exactement trois valeurs propres } \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2}$ (avec $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$).

3.4. D'après la question 1.6., $f = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j p_j$ donc

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{j=0}^{2} \lambda_j p_j\right) = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_j) = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j M_j$$

Et d'après la question précédente, $\boxed{A = 2M_2 + 4M_4}$.

3.5. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ alors

$$AX = 4X \Leftrightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ -3y - t = 0 \\ -x - z = 0 \\ -y - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -3y \\ 0 = 0 \\ -y + 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, en notant $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \mathrm{Vect}(u)$ et comme u est non nul, $\boxed{\dim(E_2) = 1}$. Comme $\|u\| = \sqrt{2}$ alors $\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u \text{ est un vecteur de } E_2 \text{ tel que } \|v_2\| = 1}$.

3.6. Soit $x \in E$, comme (v_2) est une base orthonormale du sous-espace vectoriel de dimension finie E_2 alors $\boxed{p_2(x) = (x|v_2)v_2}$.

3.7. Soit $x \in E$. En notant $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $V_2 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v_2)$ alors, d'après la question précédente et comme $\alpha V_2 = V_2.(\alpha)$ (avec $(\alpha) \in M_1(\mathbb{R})$).

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_2(x)) = (x|v_2)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v_2) = V_2.(V_2^T X) = (V_2 V_2^T)X$$

Donc $\boxed{M_2 = V_2 V_2^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

4. D'après la question 3.4. et la précédente, $M_1 = \frac{1}{2}(A - 4M_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'après la définition de f^I,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^I) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\lambda_1}p_1 + \frac{1}{\lambda_2}p_2\right) = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}M_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^I) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.