Concours Blanc N°3

Analyse (4 heures)

EXERCICE .

On considère les équations différentielles :

(E): $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$

(H): $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=0$

On note $I=]0,+\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

Q1. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

Q2. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout $x\in I$, $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$.

Q3. On note pour $x\in I$, $g(x)=\dfrac{-1}{x^2}$ et $h(x)=\dfrac{\operatorname{sh}x}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g\in S_I(E)$ et $h\in S_I(H)$.

Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

Q4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

PROBLÈME. 1

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q1. Question préliminaire

Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q2. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q3. Déterminer sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

Q4. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

Q5. Justifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \mathrm{d}x$.

Q6. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q7. Donner sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} \mathrm{d}x$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q8. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Q9. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, 1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q10. Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t}{1+t^2}-\frac{x^2t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x\in]0,1[$, $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2-1}$.

Q11. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

PROBLÈME. 2

Pour tout réel strictement positif t, on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x)=\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x>0 \end{cases}.$$

Partie 3 : Produit de convolution et une transformé

Dans la suite du problème, on note $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions h continues sur, $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif M et un réel strictement positif λ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R}, |h(x)|\leq Mf_t(\lambda x)$.

On admet le résultat suivant : *si ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications ϕ_1 et ϕ_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, |\phi(x,y)|\leq\phi_1(x)\phi_2(y)$, alors les deux expressions $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,y)dx\right)dy$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,y)dy\right)dx$ sont bien définies et elles sont égales.*

On rappelle que l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, noté $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, muni des deux lois" $+$" et "." usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $(\mathbf{E},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que la fonction f_t est un élément de $\mathbf{E}$.

2. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$. On note $\varphi*\psi$ l'application définie, pour tout réel x, pour lequel l'intégrale existe, par $(\varphi*\psi)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\psi(x-u)du$.

a) Montrer que $\varphi*\psi$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\varphi*\psi=\psi*\varphi$.

c) Déterminer f_t*f_t.

d) Montrer que $\varphi*\psi$ est un élément de $\mathbf{E}$.

3. Soit φ un élément de $\mathbf{E}$. On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du$.

a) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, les expressions de $\widehat{\varphi}'(x)$ et $\widehat{\varphi}''(x)$, chacune à l'aide d'une intégrale.

4. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$.

a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x,u) de $\mathbb{R}^2$,

$$u^2+(x-u)^2 \geq \alpha\left(u^2+x^2\right)$$

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi * \psi)(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx$.

c) Montrer que, pour tout réel ω, $\widehat{(\varphi * \psi)}(\omega)=\widehat{\varphi}(\omega).\widehat{\psi}(\omega)$.

Partie 4 : Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des fonctions ψ de $\mathbf{E}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx=1$. Pour toute fonction ϕ de $\mathbf{E}_1$, on considère la suite $\left(\phi_n\right)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_1=\phi$ et pour tout entier $n\geq 2$, $\phi_n=\phi_{n-1}*\phi_1$

1. Montrer que, pour tout entier $n\geq 1, \phi_n$ est un élément de $\mathbf{E}_1$.

2. Déterminer, pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout réel $x, \widehat{\phi_n}(x)$ en fonction de $\hat{\phi}(x)$ et de n.

3. Dans cette question, on prend $\phi=\left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right)f_t$, ou f_t est la fonction définie au début du problème.

a) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, il existe un réel $C_n(t)$, à déterminer, tel que $\forall x\in\mathbb{R};\ \phi_n(x)=C_n(t)\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}$.

b) Montrer qu'il existe une constante réelle ν strictement positive, tel que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout réel u, $\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right)=\mathrm{e}^{\nu u^2}$.

4. Soit ϕ un élément quelconque de $\mathbf{E}_1$. On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1}=\int_{-\infty}^{+\infty}u\phi_n(u)du, \quad M_{n,2}=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\phi_n(u)du \ \text{ et } V_n=M_{n,2}-M_{n,1}^2$$

a) Montrer que la fonction $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{n,1}$ et de $M_{n,2}$.

b) En déduire que $M_{n,1}=nM_{1,1}$ et $V_n=nV_1$.

5. On suppose de plus dans cette question que la fonction ϕ vérifie $M_{1,1}=0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right)$.

FiN

(Corrigé)

PROBLÈME. 2

Partie 3: Produit de convolution et une transformé

1. • On a $\mathbf{E} \subset \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et il contient la fonction nulle, donc $\mathbf{E} \neq \emptyset$.
Soit φ, ψ dans $\mathbf{E}$ et α, β dans $\mathbb{R}$, donc il existe $M_\varphi, M_\psi, \lambda_\varphi, \lambda_\psi$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$M_\varphi \geq 0, M_\psi \geq 0, \lambda_\varphi > 0, \lambda_\psi > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq M_\varphi f_t(\lambda_\varphi x) \ , |\psi(x)| \leq M_\psi f_t(\lambda_\psi x) \qquad (1)$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)| \leq |\alpha| M_\varphi f_t(\lambda_\varphi x) + |\beta| M_\psi f_t(\lambda_\psi x)$$

soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$ alors $f_t(\lambda_\varphi x) \leq f_t(\delta x)$ et $f_t(\lambda_\psi x) \leq f_t(\delta x)$, par suite

$$|\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)| \leq \left(|\alpha| M_\varphi + |\beta| M_\psi\right) f_t(\delta x)$$

donc $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathbf{E}$. Ce qui prouve que est $\mathbf{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

• Si on prend $M = \lambda = 1$ on obtient $f_t \in \mathbf{E}$.

2. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$, on garde les notations (1).

a) Soit $x, u \in \mathbb{R}$ on a $|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u))$ et

$$f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u)) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right) \text{ et } f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u)) \underset{u\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

donc la fonction $u \mapsto f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u))$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par suite $u \mapsto \varphi(u)\psi(x-u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $\varphi * \psi$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Écrivons

$$(\varphi * \psi)(x) = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} \varphi(u)\psi(x-u)du$$

et posons $v = x - u$ alors pour tout $A > 0$

$$\int_{-A}^{+A} \varphi(u)\psi(x-u)du = \int_{x-A}^{x+A} \varphi(x-v)\psi(v)dv$$

par passage à la limite on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v)\varphi(x-v)dv$$

Ainsi $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
(f_t * f_t)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(u) f_t(x-u)du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}(u^2+(u-x)^2)}du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(tu^2 - txu + \frac{1}{2}tx^2)}du
\end{aligned}$$

d'après la question 2) de la partie 2 on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4t}} \text{ avec } \Delta = -(tx)^2$$

donc $(f_t * f_t)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}(x)$ ainsi $\boxed{f_t * f_t = \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}}$

d) On garde les notations de la question 1) . Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} |\varphi * \psi(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\,|\psi(x-u)|\,du \\ &\leq M_\varphi M_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\lambda_\varphi u)\ f_t(\lambda_\psi(x-u))\ du \end{aligned}$$

Soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$, on a $f_t(\lambda_\varphi u)\ f_t(\lambda_\psi(x-u)) = f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u))$ donc

$$|\varphi * \psi(x)| \leq M_\varphi M_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u))\ du$$

le changement de variable $v = \delta u$ donne

$$\begin{aligned} |\varphi * \psi(x)| &\leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(v)\ f_t(\delta x - v)\ dv \\ &\leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} (f_t * f_t)(\delta x) \end{aligned}$$

la question précédente donne $|\varphi * \psi(x)| \leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}(\delta x)$ et remarquons que $f_{\frac{t}{2}}(\delta x) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}\left(\frac{\delta x}{\sqrt{2}}\right)^2} = f_t(\frac{\delta x}{\sqrt{2}})$.
Il suffit donc de prendre $M_{\varphi*\psi} = \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$ et $\lambda_{\varphi*\psi} = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, ce qui justifie que $\varphi * \psi$ est un élément de $\mathbf{E}$.

3. Soit φ un élément de $\mathbf{E}$. On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du.$

a) Soit $x, u \in \mathbb{R}$ on a

$$|\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)| \leq M_\varphi \mathrm{e}^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u)$$

comme $\mathrm{e}^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ et $\mathrm{e}^{-xu} f_t(\lambda_\varphi) \underset{u\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ alors la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,u) & \mapsto & \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u) \end{array} \right.$, les dérivées partielles de h par rapport à x existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
On a $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,u) = u^2 \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)$ et pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}^2$
Soit $A > 0$, on a pour tout $(x,u) \in [-A, A] \times \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,u)\right| \leq u^2 \mathrm{e}^{|xu|}\,|\varphi(u)| \leq M_\varphi u^2 \mathrm{e}^{A|u|} f_t(\lambda_\varphi u)$$

la fonction $u \mapsto M_\varphi u^2 \mathrm{e}^{|xu|} f_t(\lambda_\varphi u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (comme dans a)), c'est donc une fonction de domination. Par le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale , $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-A, A]$, ceci est valable pour tout $A > 0$ donc $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\widehat{\varphi}'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du \ \ ,\ \widehat{\varphi}''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du \ \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

4. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$.

a) Pour tout (x,u) de $\mathbb{R}^2$, $\|(x,u)\| = \sqrt{u^2+x^2}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, posons $N(x,u) = \sqrt{u^2+(x-u)^2}$. On vérifie facilement que N est une norme de $\mathbb{R}^2$, comme on est en dimension finie ces deux normes sont équivalentes, d'où l'existence de $\beta \geq \alpha > 0$ tel que $\|(x,u)\|\,\alpha \leq N(x,u) \leq \beta\,\|(x,u)\|$.
Ainsi il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x,u) de $\mathbb{R}^2$, $\boxed{u^2+(x-u)^2 \geq \alpha\left(u^2+x^2\right)}$.

b) Soit (x, u) de $\mathbb{R}^2$ on a

$$|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\lambda_\varphi u)\ f_t(\lambda_\psi(x-u))$$

soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$ donc

$$|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u))$$

remarquons que

$$f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u)) = \mathrm{e}^{-\frac{t\delta^2}{2}(u^2+(x-u)^2)}$$

d'après a) il existe $\alpha > 0$ tel que $u^2 + (x-u)^2 \geq \alpha\,(u^2 + x^2)$ donc

$$f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u)) \leq \mathrm{e}^{-\frac{t\delta^2}{2}(\alpha(u^2+x^2))}$$

Si on pose $\Phi : (x, u) \mapsto \varphi(u)\psi(x-u)$. Soit $\phi_1 : x \mapsto M_\varphi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2}$ et $\phi_2 : x \mapsto M_\psi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$|\Phi(x, u)| \leq \phi_1(x)\phi_2(u)$$

Le résultat admis au début de la partie permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)du\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)dx\right) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-u)dx\right) du
\end{aligned}$$

le changement de variable $x - u = v$ donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-u)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx$, par suite

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx}$$

c) Soit $\omega \in \mathbb{R}$, posons $\varphi_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-\omega x}\varphi(x)$ et $\psi_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-\omega x}\psi(x)$. Avec les notations de la question b) on définies les fonctions suivantes :
$\phi_1 : x \mapsto M_\varphi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2 - \omega x}$ et $\phi_2 : x \mapsto M_\psi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2 - \omega x}$, qui sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
Le résultat de la question b) appliqué à φ_0 et ψ_0 donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_0 * \psi_0)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x)dx$$

qui se traduit par

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\omega u}\varphi(u)\mathrm{e}^{-\omega(x-u)}\psi(x-u)du\right) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\omega x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)du\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\omega x}\varphi(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\omega x}\psi(x)dx
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout réel ω on a $\boxed{\widehat{(\varphi * \psi)}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega).\widehat{\psi}(\omega)}$.

Partie 4: Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des fonctions ψ de $\mathbf{E}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 1$. Pour toute fonction ϕ de $\mathbf{E}_1$, on considère la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_1 = \phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1$

1. Montrons le par récurrence sur n.

On a $\phi_1 \in \mathbf{E}_1$, supposons que $\phi_n \in \mathbf{E}_1$, d'après la question 2) de la partie 3 on a $\phi_{n+1} = \phi_n * \phi_1 \in \mathbf{E}$.

La question 4)b. donne

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n+1}(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_n * \phi_1)(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)dx . \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $\phi_{n+1} \in \mathbf{E}$. D'où pour tout entier $n \geq 1$, $\phi_n \in \mathbf{E}_1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 2) de la partie 3 on a

$$\widehat{\phi_n}(x) = \widehat{\phi_{n-1} * \phi_1}(x) = \widehat{\phi_{n-1}}(x).\widehat{\phi_1}(x) = \widehat{\phi_n}(x).\hat{\phi}(x)$$

par suite $\boxed{\widehat{\phi_n}(x) = \left(\hat{\phi}(x)\right)^n}$.

3. On prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right) f_t$.

a) Par récurrence sur $n \geq 1$.

- On a $\phi_1(x) = C_1(t)\ \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ avec $C_1(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$.
- Supposons que $\phi_n(x) = C_n(t)\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}$, alors

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x) &= (\phi_n * \phi)(x) \\ &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} C_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2n} - t\frac{(x-u)^2}{2}} du \\ &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} C_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2n}((n+1)u^2 - 2nux + nx^2} du \end{aligned}$$

simplifions l'exposant

$$t\frac{u^2}{2n} + t\frac{(x-u)^2}{2} = \frac{t(n+1)}{2n}u^2 - tux + \frac{t}{2}x^2$$

la question 2) de la partie 2 nous donne, avec $a = \frac{t(n+1)}{2n}$ et $\Delta = -\frac{t^2x^2}{n}$

$$\phi_{n+1}(x) = C_n(t)\sqrt{\frac{n}{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{-tx^2}{2(n+1)}}$$

Nous obtenons le résultat pour $n+1$ avec $C_{n+1}(t) = C_n(t)\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

- Cette relation permet d'avoir $C_n(t) = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \cdots \sqrt{\frac{1}{2}}C_1(t)$ par suite $C_n(t) = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}$
- Finalement on a pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}}$.

b) Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x}\phi_n(x)dx = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}dx$$

le changement de variable $s = \sqrt{\frac{t}{n}}x$ donne

$$\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-us}\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}ds = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(s+u)^2}{2}}ds$$

et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(s+u)^2}{2}}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$, ainsi $\boxed{\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2}}$

4. Soit ϕ un élément quelconque de $\mathbf{E}_1$. On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_n(u)du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\phi_n(u)du \text{ et } V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$

a) La question 3) de la partie 3 permet d'établir par récurrence que $\widehat{\phi_n}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ de plus $M_{n,1} = -\left(\widehat{\phi_n}\right)'(0)$ et $M_{n,2} = \left(\widehat{\phi_n}\right)''(0)$.

Donc $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\widehat{\phi_n}(t) = 1 + \left(\widehat{\phi_n}\right)'(0)t + \frac{1}{2}\left(\widehat{\phi_n}\right)''(0)t^2 + o(t^2) = 1 - M_{1,n}t + \frac{1}{2}M_{2,n}t^2 + o(t^2).$$

b) On a la relation $\widehat{\phi_n}(t) = \left(\hat{\phi}(t)\right)^n$ et

$$\begin{aligned}\left(\hat{\phi}(t)\right)^n &= \left(1 - M_{1,1}t + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n \\ &= 1 - nM_{1,1}t + \left(\frac{n}{2}M_{2,1} + \frac{n\,(n-1)}{2}M_{1,1}^2\right)t^2 + o(t^2).\end{aligned}$$

Par unicité du D.L, on en déduit : $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $M_{2,n} = nM_{2,1} + n\,(n-1)\,M_{1,1}^2$,
donc $V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2 = nM_{2,1} - nM_{1,1}^2 = nV_1$, ainsi $\boxed{M_{1,n} = nM_{1,1} \quad \text{et} \quad V_n = nV_1}$.

5. Si $M_{1,1} = 0$ alors $\widehat{\phi_n}(t) = \left(1 + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, pour n assez grand on a

$$\begin{aligned}\hat{\phi}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{n\to\infty} \widehat{\phi_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2}\right)}$.

EXERCICE..

Q 4. On normalise l'équation (H) en divisant chaque membre par x^2. Comme les applications $x \mapsto \frac{4}{x}$ et $x \mapsto \frac{2-x^2}{x^2}$ sont continues sur I, le théorème de Cauchy linéaire assure que $S_I(H)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Q 5. Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Alors f est de classe C^∞ et dérivable terme à terme. Pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
&x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2) f(x) \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + 4n a_n + 2a_n\right) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1) + 4n + 2\right) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\left(n^2 + 3n + 2\right) a_n - a_{n-2}\right] x^n + 2a_0 + 6a_1 x.
\end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si f et $x \mapsto 1$ coïncident sur un voisinage à droite de l'origine, si et seulement si les coefficients de leurs développements en série entière sont égaux. Si et seulement si :

$$2a_0 = 1, \quad 6a_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \ \left(n^2 + 3n + 2\right) a_n - a_{n-2} = 0,$$

si et seulement si :

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \ a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-2}.$$

Cette relation de récurrence et la nullité de a_1 impliquent : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$. Pour déterminer les termes d'indice pair, posons $n = 2j$ ci-dessus et divisons la relation de récurrence par $a_{2j-2} \neq 0$ (une récurrence facile, du fait que a_0 soit non nul, implique que tous les termes d'indice pair sont non nuls). On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2k}}{a_0} = \prod_{j=1}^{k} \frac{a_{2j}}{a_{2(j-1)}} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j+1)(2j+2)} = \frac{2}{(2k+2)!},$$

donc f est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+2)!} a_0 x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)!} x^{2k}.$$

Je n'ai montré que le sens direct, le sens réciproque étant immédiat. Pour $x \in I$, cela donne :

$$f(x) = x^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2(k+1))!} x^{2(k+1)} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \frac{1}{x^2} \left(\operatorname{ch}(x) - 1\right).$$

Réciproquement, il s'agit bien d'une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (le cosinus hyperbolique est une fonction usuelle et il n'y a pas à redémontrer que le rayon de convergence de la série ci-dessus est infini), solution de (E) par les équivalences ci-dessus. Ce qu'il fallait démontrer.

Q 6. Comme $S_I(E)$ est un espace affine de direction $S_I(H)$, la différence de deux éléments de $S_I(E)$ est un élément de $S_I(H)$. Par conséquent $f-g$ (où f est la fonction de la question précédente) est dans $S_I(E)$. La famille :

$$(f-g,h)$$

est donc une famille de $S_I(H)$, libre puisque $f-g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{x^2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x^2}$ sont respectivement paire et impaire (et on sait que les fonctions paires et les fonctions impaires forment deux sous-espaces vectoriels en somme directe) : c'est donc une base de $S_I(H)$. En utilisant la solution particulière g, on a :

$$S_I(E) = g + S_I(H) = g + \mathrm{Vect}(f-g,h) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{a\mathrm{ch}(x) + b\mathrm{sh}(x) - 1}{x^2} \end{array} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Q 7. La question posée revient à déterminer les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$. Soit y une telle solution. Elle définit par restriction une solution sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par la question précédente il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $y_{|\mathbb{R}_+^*} = a(f-g) + bh$. Or y doit être continue en 0 (elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$), et un développement limité à l'ordre 2 du cosinus et du sinus hyperbolique donne :

$$y_{|\mathbb{R}_+^*}(x) = \frac{a\left(1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + b\left(x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{x^2} = \frac{a + bx + \frac{a}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2}.$$

On montre aisément que cette quantité n'a pas de limite finie en 0, sauf si $a = b = 0$. Ainsi $y_{|\mathbb{R}_+} = 0$.
En reproduisant la même étude que dans les questions précédentes (où, finalement, la seule chose qui comptait était d'être sur un intervalle ne contenant pas 0 : l'étude aurait donc pu être faite sur $\mathbb{R}_-^*$), on montre de même que la restriction de y à $\mathbb{R}_-^*$ doit être combinaison linéaire de $f-g$ et h, puis nulle pour la même raison que sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi : $y = 0$, et donc :

$$\dim(S_{\mathbb{R}}(H)) = 0.$$

PROBLÈME

Q 8. Par le théorème de sommation par paquets (qu'on peut utiliser ici sans hypothèse de sommabilité puisqu'on somme des termes positifs), avec le recouvrement $\mathbb{N} \setminus \{0\} = (2\mathbb{N} \setminus \{0\}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\in 2\mathbb{N}\setminus\{0\}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\in 2\mathbb{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge évidemment (c'est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$), cette égalité peut se réécrire :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

ce dont on déduit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3/4}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$

PROBLÈME. 1

Partie I

Q 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée de $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ est $x \mapsto (n+1)(\sin(x))^n \cos(x)$.

Pour obtenir une relation entre les intégrales $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} \mathrm{d}x$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x$, nous allons intégrer par parties afin d'abaisser le degré de l'exposant $n+2$. Plus précisément : pour obtenir l'exposant n, nous allons dériver $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ et intégrer $x \mapsto \sin(x)$. La formule de l'intégration par parties donne alors :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} \mathrm{d}x = \Big[-\cos(x) \cdot (\sin(x))^{n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot (\sin(x))^n \cos(x) \mathrm{d}x,$$

donc : $W_{n+2} = (n+1) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n (\cos(x))^2 \mathrm{d}x$. En utilisant la formule : $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on obtient :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} \mathrm{d}x = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2},$$

c'est-à-dire $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$, puis :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

On en déduit la relation demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la proposition : « $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. »

Pour $n = 0$ on a : $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, et : $\dfrac{2^{2 \cdot 0}(0!)^2}{(2 \cdot 0 + 1)!} = 1 = W_1$, d'où P_0. À présent, si $n \in \mathbb{N}$ est un entier tel que P_n, alors :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} &= \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}, \end{aligned}$$

d'où P_{n+1}.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, par principe de récurrence on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q 10. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ peut s'écrire $x \mapsto (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$: or nous connaissons le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Nous allons l'utiliser avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et le composer avec $x \mapsto -x^2$, pour obtenir celui demandé. On a, pour rappel :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x^2 \in]-1,1[$, et on peut donc évaluer en $-x^2$ l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} \left(-x^2\right)^n.$$

Pour les besoins de la question suivante, nous allons simplifier le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\cdot(2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard : on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n}\times\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a : $(-x^2)^n = (-1)^n x^{2n}$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

Passons à l'arc sinus. On a :

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}\mathrm{d}t.$$

Or la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ est de rayon de convergence 1, donc on peut l'intégrer terme à terme sur tout segment inclus dans $]-1,1[$. On en déduit :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

En conclusion, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}, \quad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Q 11. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. En posant $x = \sin(t) \in [0,1[$ dans le développement en série entière de l'arc sinus, on obtient :

$$\arcsin(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(\sin(t))^{2n+1}}{2n+1},$$

et $\arcsin(\sin(t)) = t$ car $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où le résultat désiré (quitte à renommer t en x).

Q 12. Il s'agit de justifier l'interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$. Nous allons utiliser le théorème d'intégration terme à terme positif. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1}.$$

L'application g_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc elle y est intégrable et elle est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus elle est positive sur cet intervalle et sa somme est continue (c'est la fonction $x \mapsto x$ d'après la question précédente), donc par le théorème d'intégration terme à terme positif on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n$$

ce qui donne immédiatement le résultat voulu.

Autre démonstration. On pouvait aussi démontrer cette interversion avec l'autre théorème d'intégration terme à terme, valable *a priori* sur les segments, mais cela nécessite de remarquer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge aussi en $x = 1$. Faisons-le. Si on essaie d'appliquer la règle de D'Alembert, on tombe sur le cas d'incertitude $L = 1$. Pour étudier sa nature, nous allons donc déterminer un équivalent asymptotique simple de son terme général, avec la formule de Stirling. On a, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \times \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} > 0,$$

or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge parce que son exposant est $\frac{3}{2} > 1$. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$ converge. Par le théorème d'Abel radial, on en déduit que le développement en série entière de l'arc sinus reste valable pour $x = 1$, et donc que la relation de la question **Q 11** reste valable pour $x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi elle est valable sur un SEGMENT et il suffit de montrer la convergence uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour intégrer terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad g_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{1}{2n+1}$. On en déduit, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|g_n\|_\infty \leqslant \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}.$$

Or nous avons démontré ci-dessus que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$ converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \|g_n\|_\infty$ converge donc : d'où le résultat.

Ayant la convergence uniforme de la série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x,$$

d'où le résultat.

Q 13. D'après la question **Q 9** on a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n+1}\,\mathrm{d}x = W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Donc par la question précédente et la question **Q 11** :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or on a facilement : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^2}{8}$. Donc :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On conclut avec la question **Q 8**, et on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II

Q 14. Soit $x \in]-1,1[$. On a : $|x^2| < 1$, donc :

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}.$$

On a donc : $\dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln(x))$ pour tout $x \in [0,1[$, puis :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x,$$

toutes les fonctions en jeu étant continues par morceaux sur $]0,1[$. L'égalité $(*)$ est licite par le théorème d'intégration terme à terme positif. En effet :

- on a positivité et continuité par morceaux sur $]0,1[$ de la fonction $f_n : x \mapsto -x^{2n}\ln(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement et sa somme est $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$, qui est bien continue sur $]0,1[$;
- il reste à justifier l'intégrabilité sur $]0,1[$ de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela équivaut à la convergence de son intégrale sur $]0,1[$) ; nous allons faire mieux en calculant l'intégrale sur $]0,1[$ de f_n en même temps, *via* une intégration par parties, où l'on dérive $x \mapsto -\ln(x)$ et intègre $x \mapsto x^{2n}$; comme :

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x) = \lim_{x\to 1} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x) = 0,$$

la formule de l'intégration par parties assure que les intégrales $\int_0^1 -x^{2n}\ln(x)\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 -\dfrac{x^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}x$ sont de même nature (donc convergentes, puisque la seconde est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment), et on a :

$$\int_0^1 -x^{2n}\ln(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x)\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2},$$

ce qui montre à la fois l'intégrabilité de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $]0,1[$, et que son intégrale égale $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

En conclusion, on a montré :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ce calcul montre en passant que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$ converge, étant donné que cette somme est finie (la famille de réels positifs $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est sommable puisque sa somme est celle d'une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc ses familles extraites sont sommables également).

Q 15. Nous allons utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (x,t)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad g(x,t)=\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}.$$

Alors :

— pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, l'application $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

— pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, l'application $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

— pour tout $(t,x)\in(\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$|g(x,t)|\leqslant\frac{1}{1+t^2}\qquad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisqu'elle est continue sur cet intervalle, et que $|\varphi|=\varphi$ admet comme primitive l'arc tangente, qui admet une limite finie (égale à $\frac{\pi}{2}$) en $+\infty$.

Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, d'une part $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, et d'autre part f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qu'il fallait démontrer.

Q 16. On reprend les notations de la question précédente. Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

— pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, l'application $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,1]$ et on a :

$$\forall(t,x)\in\mathbb{R}_+\times]0,1],\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{t}{1+(xt)^2}\frac{1}{1+t^2}\,;$$

— pour tout $x\in]0,1]$, l'application $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente ;

— pour tout $x\in]0,1]$, l'application $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

— pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,1]$ et tout $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times[a,b]$, on a :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)}.\qquad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

Justifions que l'application $\varphi : t\mapsto\dfrac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: elle est continue sur cet intervalle, et on a :

$$\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{a^2}\frac{1}{t^3}>0,$$

or on sait que les fonctions de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1 sont intégrables au voisinage de $+\infty$, donc par comparaison il en est de même de φ : d'où le résultat.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, vérifié sur tout segment de $]0,1]$, d'une part $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in]0,1]$, et d'autre part f est de classe C^1 sur $]0,1]$. De plus :

$$\forall x \in]0,1], \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+(xt)^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Q 17. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times]0,1[$. On a :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2} = \frac{t(1+t^2x^2) - x^2t(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = (1-x^2)\frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

et on en déduit, par la question précédente :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2x^2)}{2}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^2x^2}\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2(1-x^2)} \\ &= -\frac{\ln(x)}{1-x^2},\end{aligned}$$

d'où le résultat, quitte à multiplier par -1 le dénominateur.

Q 18. On a :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0, \quad f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{\arctan(t)^2}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8},$$

or en intégrant la relation de la question précédente, on a l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = c + \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t.$$

Calculons la limite de chaque membre en 0. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$ converge par la question **Q 14**, on a : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t = 0$. De plus f est continue en 0 par la question **Q 15**, donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Ainsi l'égalité ci-dessus donne, quand $x \to 0$:

$$0 = c.$$

Cette même égalité donne, quand $x \to 1$, toujours par continuité de f :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = f(1) = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit, par la question **Q 14** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On conclut avec la question **Q 8**, et on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$