My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Concours Blanc (4h)

Réduction-Intégration

Problème 1

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$: $y' + \dfrac{\mu}{x} y = 0$.

7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soient $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0.$ $\qquad (*)$

8.1.1. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression $(*)$ par x lorsque x est non nul.

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

8.2.2. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right) \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

Problème 2 : Décomposition de Dunford

Notations pour l'ensemble du sujet :
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On désigne, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> (1) $A = D + N$;
>
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
>
> (3) N est nilpotente ;
>
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q2. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.
Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q3. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
Calculer son polynôme minimal χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.
Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par :
$D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q7. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.

Q8. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
$\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\},\ \ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\},\ \ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.
Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q9. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q10. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1.$$

Q11. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.
Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{id})$.

Q12. On pose $d = p + 2q$. Ecrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **Q8**).
Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q14. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q15. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A-B$ est nilpotente.

Q16. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q17. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Corrigé

Problème 1 (e3a 2024)

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. F est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que la fonction F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
Ainsi, pour tout x réel positif, on a : $F'(x) = f(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $x > 0$.
Le changement de variable affine $u = xt$ permet d'écrire que : $\Psi(f)(x) = \dfrac{F(x)}{x}$.

3. D'après la question de cours 1. la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étude en 0 : on a, pour tout $x > 0$, $\Psi(f)(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ et donc, $\lim\limits_{x\to 0} \Psi(f)(x) = F'(0) = f(0)$.
On en déduit que $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $\Psi(f)(0) = f(0)$.

4. La linéarité de l'intégration donne celle de Ψ.
De plus, d'après la question précédente, pour toute f de E, on a $\Psi(f) \in E$, ce qui achève de prouver que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

5.1. Par opérations élémentaires, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étude en 0 : On a, pour tout $x > 0$, $|h(x)| \leqslant |x|$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$.
Il en résulte que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. Soit $x > 0$. Étudions la dérivabilité de le fonction h en 0.
On a : $\Delta(x) = \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On considère alors la suite u définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n\,\pi + \pi/2}$.

Alors, pour tout entier naturel n, $\Delta(u_n) = (-1)^n$, ce qui prouve que $\Delta(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0.

Il en résulte que h n'est pas dérivable en 0 et donc, ne peut être de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$: il existe donc $f \in E$ telle que $g = \Psi(f)$.

Alors, pour tout $x > 0$, $x\,g(x) = F(x)$ et $0 \times g(0) = 0 = F(0)$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ coïncide avec la fonction $x \mapsto F(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. En utilisant la question précédente regardons si la fonction $\theta : x \mapsto x\,h(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$:

- Facilement, puisque pour tout $x > 0$, on a : $|\theta(x)| \leqslant x^2$, la fonction θ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\theta(0) = 0$.

- Pour $x > 0$, $\dfrac{\theta(x) - \theta(0)}{x - 0} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 : la fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\theta'(0) = 0$.

- Pour tout $x > 0$, $\theta'(x) = 2\,x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui n'admet pas de limite en 0 puisque la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'en possède pas (On procède comme à la question **5.2**)

Il en résulte que la fonction θ n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve d'après la question précédente que $h \notin \mathrm{Im}\,(\Psi)$.

5.5. On déduit de l'étude précédente que Ψ n'est pas surjective.

6. Soit $f \in E$ telle que $\Psi(f) = 0$ (fonction nulle)

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\dfrac{F(x)}{x} = 0$, soit $\forall\, x > 0,\ F(x) = 0$.

Comme F est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que F est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et par dérivation que f est aussi nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Comme Ψ est injective, 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\,y = 0$$

7.2. Les solutions de (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{C}{x^\mu}$ où $C \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

7.3. Pour qu'une solution de (L) soit prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ il faut qu'elle possède une limite finie en 0.

- Si $\mu \leqslant 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{C}{x^\mu}$ possède une limite finie en 0.

- Si $\mu > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{C}{x^\mu}$ n'est prolongeable par continuité en 0 que si, et seulement si, $C = 0$ et c'est donc la fonction nulle.

Conclusion : Les solutions de (L) prolongeable par continuité en 0 sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{C}{x^\mu}$, avec $\mu \leqslant 0$ et $C \in \mathbb{R}$.

7.4. Soit λ une valeur propre de Ψ et f une fonction non nulle du sous-espace propre associé $E_\lambda(\Psi)$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\dfrac{F(x)}{x} = \lambda f(x) = \lambda F'(x)$.

Ainsi, F est solution de l'équation (L) dans le cas où $\mu = -\dfrac{1}{\lambda}$.

Mais comme F est continue sur $\mathbb{R}_+$, il faut récupérer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$, ce qui donne : $\lambda > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = C\, x^{1/\lambda}$ puis $f(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Mais il faut aussi que f soit continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\dfrac{1}{\lambda} - 1 \geqslant 0$ ce qui donne finalement $\lambda \in]0, 1]$

Ainsi, le spectre de Ψ est inclus dans $]0, 1]$ et facilement, $E_\lambda(\Psi) \subset \mathrm{Vect}(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1})$.

Réciproquement, soit $\lambda \in]0, 1]$ et $f_\lambda : x \mapsto x^{1/\lambda-1}$.

On a : $\Psi(f_\lambda) = \displaystyle\int_0^1 (xt)^{\frac{1}{\lambda}-1}\, \mathrm{d}t = x^{\frac{1}{\lambda}-1} \left[\lambda_, t^{\frac{1}{\lambda}}\right]_0^1 = \lambda\, f_\lambda(x)$.

Finalement, on a donc démontré que le spectre de Ψ est $]0, 1]$ et que pour chaque valeur propre $\lambda > 0$, le sous-espace propre associé est : $E_\lambda(\Psi) = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1})$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soient $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i\, f_i + \sum_{j=1}^n \beta_j\, g_j = 0$ $(*)$.

8.1.1. Soit $x > 0$.

En simplifiant par x non nul, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i\, x^{i-1} + \sum_{j=1}^n \beta_j\, x^{j-1} \ln(x) = g(x) = 0$.

- Si $\beta_1 \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) \neq 0$ et donc $\beta_1 = 0$.
- On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) = \alpha_1$ et donc que $\alpha_1 = 0$.

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.

On a toujours $x > 0$ et on simplifie $(*)$ par x^{p-1} cette fois, ce qui donne :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i\, f_{i-p+1} + \sum_{j=p+1}^n \beta_j\, g_{j-p+1} = 0$$

Par le même raisonnement qu'au-dessus, on obtient alors $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Par récurrence forte, on a donc montré que $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \beta_1 = ... = \beta_n = 0$, ce qui prouve la liberté de la famille $\mathscr{B}$ et que $\dim(F_n) = 2n$.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $t \mapsto t^p \ln(t)$ est continue sur l'intervalle $]0, x]$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} t^p \ln(t) = 0$ et donc, on peut prolonger par continuité la fonction $t \mapsto t^p \ln(t)$ sur l'intervalle $[0, x]$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Comme les fonctions $t \mapsto t^{p+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \ln(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{p+1}}{p+1}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{p+1}}{p+1} \ln(x) - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.$$

8.2.2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Alors, pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$\Psi(f_i)(x) = \displaystyle\int_0^1 (xt)^i\,\mathrm{d}t = x^i \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_0^1 = \frac{1}{i+1}\,x^i$, soit $\Psi(f_i) = \dfrac{1}{i+1}\,f_i \in F_n$

et $\Psi(g_i) = \displaystyle\int_0^1 (xt)^i \ln(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (xt)^i\,(\ln(x) + \ln(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+1}\,x^i \ln(x) - \frac{1}{(i+1)^2}\,x^i$, soit $\Psi(g_i) = \dfrac{1}{i+1}\,g_i - \dfrac{1}{(i+1)^2}\,f_i \in F_n$.

On en déduit que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. On en déduit la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathscr{B}$:

$$M_{\mathscr{B}}(\Psi) = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2^2} & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \cdots & \cdots & & \cdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{(n+1)^2} \\
\vdots & & & \ddots & \frac{1}{2} & & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1}
\end{pmatrix}$$

8.4. $M_{\mathscr{B}}(\Psi)$ est une matrice triangulaire dont aucun des termes diagonaux est nuls : c'est une matrice inversible et donc, Ψ_n est un automorphisme de F_n.

On aurait aussi pu dire que l'injectivité de Ψ entraîne celle de Ψ_n et en tant qu'endomorphisme injectif de F_n qui est de dimension finie, c'est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} (x + x^2)\ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

On a : $z = g_1 + g_2 \in F_n$.

Puis, on prend $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j \in F_n$ et on écrit que $\Psi_n(f) = z$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{2} - \dfrac{\beta_1}{4} = 0 \\ \dfrac{\alpha_2}{3} - \dfrac{\beta_2}{9} = 0 \\ \dfrac{\beta_1}{2} = 1 \\ \dfrac{\beta_2}{3} = 1 \end{cases}$$

soit finalement, $\Psi^{-1}(z) = f_1 + f_2 + 2\, g_1 + 3\, g_2$

Problème 2 (CCINP 2021)

Partie I : quelques exemples

2 – Si A est diagonalisable, on pose alors $D = A$ et $N = 0$ et on vérifie immédiatement que le couple (D, N) vérifie les quatre propriétés de l'énoncé :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, sa décomposition de Dunford est } (A, 0)}.$$

De la même façon et avec une vérification tout aussi immédiate :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, sa décomposition de Dunford est } (D, N) = (0, A)}.$$

On pose désormais $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $A = D + N$, D est diagonalisable car diagonale, N est nilpotente car $N^2 = 0$, mais $ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On n'a donc pas $ND = DN$ et le couple (D, N) proposé n'est pas la décomposition de Dunford de A.

3 – Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$; son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2+1$. Si A avait une décomposition de Dunford (D,N) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors d'après l'énoncé on aurait $\chi_A=\chi_D$ et donc la matrice D diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ aurait un polynôme caractéristique non scindé : absurde. Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \text{ n'a pas de décomposition de Dunford dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

4 – On a :

$$\chi_A=-\begin{vmatrix}3-X&0&8\\3&-1-X&6\\-2&0&-5-X\end{vmatrix}=(1+X)\begin{vmatrix}3-X&8\\-2&-5-X\end{vmatrix}=(1+X)\left(X^2+2X+1\right)$$

On a donc $\boxed{\chi_A=(1+X)^3}$.

Comme χ_A est scindé, A dispose d'une décomposition de Dunford notée (D,N) et la matrice D a pour polynôme caractéristique $\chi_D=\chi_A=(X+1)^3$. Donc $\mathrm{Sp}(D)=\{-1\}$ et D étant de plus diagonalisable, elle est semblable à $-\mathrm{I}_3$ qui n'est semblable qu'à elle-même.

$$\boxed{\text{Donc la décomposition de Dunford de } A \text{ est } (D,N) \text{ avec } D=-\mathrm{I}_3 \text{ et } N=A+\mathrm{I}_3, \text{ soit explicitement : } N=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}.}$$

5 – Comme (D,N) est une décomposition de Dunford de A on a $A=D+N$ et $ND=DN$. Ainsi $\exp(A)=\exp(D)\exp(N)$.

Comme D est ici diagonale, on a $\exp(D)=\exp(-\mathrm{I}_3)=\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1}\right)=\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{I}_3$.

On calcule maintenant $N^2=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et par suite pour $n\geq 2$ $A^n=0$. Donc :

$$\exp(N)=\mathrm{I}_3+N=\begin{pmatrix}5&0&8\\3&1&6\\-2&0&-3\end{pmatrix}$$

Et finalement : $\boxed{\exp(A)=\frac{1}{\mathrm{e}}\begin{pmatrix}5&0&8\\3&1&6\\-2&0&-3\end{pmatrix}}$.

6 – Posons $P=X(X-1)$. On a alors $P\left(A^2\right)=A^2\left(A^2-\mathrm{I}_3\right)=\underbrace{A^2\left(A-\mathrm{I}_3\right)}_{=0}\left(A+\mathrm{I}_3\right)$. Donc :

$\boxed{P = X(X-1) \text{ est un polynôme annulateur de } A^2}$.

Posons alors $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

- On a $A = D + N$.
- P est un polynôme annulateur de A^2, non nul, scindé et à racines simples. Donc A^2 est diagonalisable.
- Comme A et $\mathrm{I}_3 - A$ commutent, on a $N^2 = A^2(\mathrm{I}_3 - A)^2 = \underbrace{A^2(A-\mathrm{I}_3)}_{=0}(A-\mathrm{I}_3) = 0$, donc N est nilpotente.
- Comme N et D sont des polynômes en A, on a $ND = DN$.

$\boxed{\text{Les points (1) à (4) ont bien été vérifiés et } (D,N) = (A^2, A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$

Partie II : un exemple par deux méthodes

7 – On calcule en un premier temps le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = -\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} -\begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 2-X & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix}$$

Puis en retranchant la première colonne à la troisième et en développant par rapport à C_3 :

$$\chi_A = (X-2)(2-X)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$$

Il s'en suit que A est diagonalisable si et seulement si $E_2(A) = \ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ est un plan. Or $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux dernières colonnes ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A - 2\mathrm{I}_3) \geq 2$ et par suite avec le théorème du rang $\dim(\ker(A - 2\mathrm{I}_3)) \leq 1$. $E_2(A)$ n'est donc pas un plan : $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Comme les polynômes $X-1$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux on a $\ker(\chi_A(A)) = \ker(A - \mathrm{I}_3) \oplus \ker(A - 2\mathrm{I}_3)^2$, et avec le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(A - \mathrm{I}_3) \oplus \ker(A - 2\mathrm{I}_3)^2 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2}.$$

8 – Pour $X = {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on résout : $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$. On pose alors $e_1 = {}^t(0,1,1)$ et $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$.

Puis on résout : $AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=y \end{cases}$. On pose alors $e_2 = {}^t(1,1,0)$ et $\ker(u-2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_2\}$.

On calcule $(A-2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

On résout alors $(A-2\mathrm{I}_3)^2 X = 0 \Leftrightarrow x = y$. On pose $e_3 = {}^t(0,0,1)$ et (e_2,e_3) et $\ker(u-2\,\mathrm{id})^2 = \mathrm{Vect}\{e_2,e_3\}$. Cette famille étant visiblement libre, elle constitue une base de $\ker(u-2\,\mathrm{id})^2$ et comme $\mathbb{R}^3 = \ker(u-\mathrm{id}) \oplus \ker(u-2\mathrm{id})^2$ on a par concaténation :

Une base de $\mathbb{R}^3$ est (e_1,e_2,e_3) avec $e_1 = {}^t(0,1,1)$, $e_2 = {}^t(1,1,0)$ et $e_3 = {}^t(0,0,1)$. En outre $\ker(u-\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$, $\ker(u-2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_2\}$ et $\ker(u-2\,\mathrm{id})^2 = \mathrm{Vect}\{e_2,e_3\}$.

On a alors : $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$. On calcule $u(e_3) = {}^t(1,1,2) = e_2 + 2e_3$. Ainsi :

La matrice B de u dans la base (e_1,e_2,e_3) est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9 – Posons $D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $B = D_0 + N_0$, D_0 est diagonalisable, $N_0^2 = 0$ et N_0 est ainsi nilpotente et enfin : $D_0 N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_0 D_0$.

La décomposition de Dunford de *B* est ainsi (D_0, N_0) où D_0 et N_0 sont les matrices définies ci-dessus.

Appelons f et g les endomorphismes ayant pour matrices respectives D_0 et N_0 dans $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$. Il apparait alors clairement que (f,g) est la décomposition de Dunford de *u*.
Or *A* est la matrice dans la base canonique de *u*, donc si on appelle *D* et *N* les matrices respectives de *f* et *g* dans la base canonique alors (D,N) vérifie les points (1) à (4) et constitue la décomposition de Dunford de *A*.

La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a ainsi $D = PD_0P^{-1}$ et $N = PN_0P^{-1}$. On détermine P^{-1} en résolvant, pour $X = {}^t(x,y,z)$ et $Y = {}^t(a,b,c)$:

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} y=a \\ x+y=b \\ x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a+b \\ y=a \\ z=a-b+c \end{cases}$$

Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$D=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi que : $N=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{La décomposition de Dunford de } A \text{ est } (D,N) \text{ avec } D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

10 – La décomposition en éléments simples d'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}+\frac{c}{(X-2)^2}$$

- On multiplie par $X-1$ et on évalue en 1 : $a=1$.
- On multiplie par $(X-2)^2$ et on évalue en 2 : $c=1$.
- On multiplie par X et on regarde la limite en $+\infty$: $0=a+b$ et donc $b=-1$.

Finalement : $\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X-2}+\frac{1}{(X-2)^2}}$.

Par suite : $1=(X-2)^2-(X-1)(X-2)+(X-1)=(X-2)^2+(3-X)(X-1)$.

$\boxed{\text{Si on pose } U=3-X \text{ et } V=1 \text{ on a l'égalité de Bézout : } (X-1)U+(X-2)^2V=1 \text{ et de plus } \deg(U)<2 \text{ et } \deg(V)<1.}$

11 – On va utiliser à plusieurs reprises dans cette question que des polynômes en u commutent. Ainsi partant de $(X-1)U+(X-2)^2V=1$ on a $U(u)\circ(u-\mathrm{id})+V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2=\mathrm{id}$, puis en évaluant en $x\in\mathbb{R}^3$: $\boxed{p(x)+q(x)=x}$.

En outre $(u-\mathrm{id})(p(x))=V(u)\circ(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2(x)$. Or d'après le théorème de messieurs Cayley et Hamilton on a $(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2=0$ et donc $p(x)\in\ker(u-\mathrm{id})$.

De même $(u-2\mathrm{id})(q(x))=U(u)\circ(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2(x)=0$ et $q(x)\in\ker(u-2\mathrm{id})^2$.

En résumé, pour $x\in\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x=p(x)+q(x) \\ p(x)\in\ker(u-\mathrm{id}) \\ q(x)\in\ker(u-2\mathrm{id})^2 \end{cases}$, et $\mathbb{R}^3=\ker(u-\mathrm{id})\oplus\ker(u-2\mathrm{id})^2$.

On en déduit que p est la projection sur $\ker(u-\mathrm{id})$ de direction $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ et que q est la projection sur $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ de direction $\ker(u-\mathrm{id})$.

12 – On rappelle que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et que (e_1) est une base de $\ker(u-\mathrm{id})$ et que (e_2,e_3) est une base de $\ker(u-2\mathrm{id})^2$. Donc la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et celle de q est $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. La matrice de $p+2q$ dans $\mathcal{B}$ est alors $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

On reconnait là la matrice D_0 de la question 8 donc $p+2q=f$ (cf question 9 : on a appelé (f,g) la décomposition de Dunford de *u*). Il s'en suit que :

$$D=V(A)(A-2\mathrm{I}_3)^2+2U(A)(A-\mathrm{I}_3)=(A-2\mathrm{I}_3)^2+2(3\mathrm{I}_3-A)(A-\mathrm{I}_3)$$

Après développement : $\boxed{D=-A^2+4A-2\mathrm{I}_3 \text{ et } N=A-D=A^2-3A+2\mathrm{I}_3}$.

Partie III : une preuve de l'unicité de la décomposition

13 – Soit λ une valeur propre de *u* et $x\in E_\lambda(u)$. On a alors $u(x)=\lambda x$ et donc $v\circ u(x)=\lambda v(x)$. Sachant $v\circ u=u\circ v$ on en déduit $u(v(x))=\lambda v(x)$ et donc $v(x)\in E_\lambda(u)$. On a montré :

Tout sous-espace propre de *u* est stable par *v*.

Comme *u* est diagonalisable, on a $E=\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}(u)$, et en appelant v_i l'endomorphisme induit par *u* sur $E_{\lambda_i}(u)$, v_i est diagonalisable (car endomorphisme induit sur un sous espace stable par un endomorphisme diagonalisable). Soit $\mathcal{B}_i$ une base de vecteurs propres de v_i. Les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont également vecteurs propres de *u* car éléments de $E_{\lambda_i}(u)$. Donc les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont vecteurs propres communs à *u* et à *v*.

Comme $E=\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}(u)$, la concaténée $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_i$ est une base de *E*, dont les vecteurs sont vecteurs propres communs à *u* et à *v* : on a trouvé une base commune de diagonalisation pour *u* et *v*.

14 – Soient *A* et *B* diagonalisables qui commutent d'endomorphismes associés α et β. Il existe alors une base de vecteurs propres communs à α et β. Soient A' et B' les matrices diagonales de α et β dans cette base commune de diagonalisation. La matrice dans cette base de $\alpha-\beta$ est alors la matrice diagonale $A'-B'$, ce qui montre que $A-B$ est diagonalisable.

15 – On se donne *A* et *B* nilpotentes qui commutent, d'indices de nilpotence respectifs *a* et *b*. Comme elles commutent, on a avec le binôme de Newton :

$$(A-B)^{a+b}=\sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}(-1)^{a+b-k}A^kB^{a+b-k}$$

Or pour $a \leq k \leq a+b$ on a $A^k = 0$ et pour $0 \leq k < a$ on a $a+b-k > b$ donc $B^{a+b-k} = 0$, et donc $(A-B)^{a+b} = 0$: $A-B$ est nilpotente.

16 – Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable et nilpotente, et soit *f* son endomorphisme canoniquement associé. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice *D* de *f* est diagonale et il existe par ailleurs $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$. On a alors $f^k = 0$ puis $D^k = 0$. D s'écrit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et alors $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ et comme $D^k = 0$ les λ_i sont tous nuls. Donc $D = 0$ puis $f = 0$ et finalement $M = 0$.

$\boxed{\text{La matrice nulle est la seule matrice diagonalisable et nilpotente}}$.

17 – On suppose qu'il existe deux couples (D, N) et (D', N') vérifiant les propriétés (1) à (4) et tels que *D*, *N*, D' et N' soient des polynômes en *A*.
Comme *D* et D' sont des polynômes en *A*, *D* et D' sont deux matrices diagonalisables qui commutent. D'après la question 14 $D - D'$ est diagonalisable. De la même façon avec la question 15, $N - N'$ est nilpotente. Or de $A = N + D = N' + D'$ on déduit $N - N' = D - D'$. Donc $N - N'$ est nilpotente et diagonalisable donc nulle d'après la question 16. Ainsi $N = N'$ puis $D = D'$. On a montré :

$\boxed{\text{La décomposition de Dunford d'une matrice à polynôme caractéristique scindé est unique.}}$