PRÉPAS ELBILIA

MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Contrôle : Algèbre Linéaire

Durée : 2 heures

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!], P_k = X^k$.

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathscr{E} = (1, X-\alpha, \ldots, (X-\alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathscr{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
Déterminer le quotient et le reste de la division cuclidienne de P par $(X-\alpha)^r$.

* * * * * * * * * * * * * * * *

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right)P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.

6.

7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ. Autrement dit T(P)=λP

7.1. Montrer que P est de degré n.

7.2. Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.

7.3. En déduire une expression de P.

Exercice 2

UTILISATION DES POLYNOMES DE TCHEBYCHEV EN ANALYSE

Notations :

On note E l'espace vectoriel des applications continues de [-1,1] dans $\mathbb{R}$.
On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de [-1,1] dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel.
On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.
Si f est un élément de E, on pose $\| f \|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

I. Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel.

1. Existence et unicité

a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété (*):

$$(*) : \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

(on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).

b) Montrer qu'un polynôme vérifiant (*) est unique.
On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n, on le note T_n.

On définit alors une fonction polynomiale sur [-1,1] par :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

2. **a)** Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$
(on pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$).

b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3.

c) Donner le coefficient du terme de plus haut degré de T_n.

3. Racines et extrema

a) Montrer que $\forall x \in$ [-1,1], $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x - \cos\theta_k)$ où $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

b) On pose pour k dans $\{0, 1,\ldots,n\}$, $c_k = \cos(\dfrac{k\pi}{n})$.

Calculer $\|T_n\|_\infty$ puis montrer que :

$\forall k \in \{0,1,...,n\}, \quad |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$ et que : $\forall k \in \{0,1,...,n-1\}, \quad T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.

Les $n+1$ réels $c_0, c_1,..., c_n$ sont appelés points de Tchebychev.

c) Dessiner le graphe de T_3, préciser sur le graphe les réels c_0, c_1, c_2, c_3.

Éléments de correction

EXERCICE 1 e3a 2023

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. La famille $\mathcal{E}$ est une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré : elle est donc libre. De plus, elle est de cardinal $n + 1 = \dim(E_n)$. C'est donc une base de E_n.

2. C'est la formule de Taylor en α : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$. Les composantes de P dans la base $\mathcal{E}$ sont donc $\left(P(\alpha), P'(\alpha), \ldots, \dfrac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}\right)$.

3. Comme α est une racine d'ordre r de P, $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$. D'après la formule de Taylor : $P = \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = (X-\alpha)^r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!}(X-\alpha)^k$. Donc le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^r$ et le polynôme nul et le quotient est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-r} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!}(X-\alpha)^k$.

******

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = X\,P(X) - \frac{1}{n}\,(X^2 - 1)\,P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. $T(P_k) = X^{k+1} - \dfrac{k}{n}(X^2 - 1)X^{k-1}$. Si $k = 0$, on obtient $T(1) = X$ et si $0 < k < n$, $T(P_k) = \dfrac{n-k}{n}P_{k+1} + \dfrac{k}{n}P_{k-1}$, et si $k = n$, $T(X^n) = X^{n-1}$.

5. On vérifie que T est linéaire, puis on remarque que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $T(P_k) \in E_n$. Comme $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E_n, les images des éléments de E_n par T sont dans E_n.

6. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/n & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)/n & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$.

7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

7.1. Notons a le coefficient dominant de P. Alors le coefficient dominant de XP est encore a et celui de $\frac{1}{n}(X^2-1)P'$ est $\frac{\deg(P)}{n}a$. Donc, si $\deg(P) \neq n$, $\deg(T(P)) = \deg(P) + 1$, donc P ne peut pas être un vecteur propre. Ainsi, $\deg(P) = n$.

7.2. Il existe $Q \in E_n$ tel que $P = (X-z_0)^r Q$ avec $Q(z_0) \neq 0$. Donc $P' = r(X-z_0)^{r-1}Q + (X-z_0)^r Q' = (X-z_0)^{r-1}(rQ + (X-z_0)Q')$. En posant $R = (rQ + (X-z_0)Q')$, on remarque que $R(z_0) \neq 0$. De plus, $\lambda P - XP = \frac{1}{n}(X^2-1)P'$, donc $(\lambda - X)(X-z_0)Q = \frac{1}{n}(X^2-1)R$. En évaluant en z_0, on obtient $0 = z_0^2 - 1$.

7.3. D'après la question précédente, il existe $\alpha \in [\![0, n]\!]$ tel que $P = (X-1)^\alpha (X+1)^{n-\alpha}$.

8. D'après la question précédente, les vecteurs propres unitaires de T sont de la forme $P = (X-1)^\alpha (X+1)^{n-\alpha}$. Alors $T(P) = X(X-1)^\alpha (X+1)^{n-\alpha} - \frac{1}{n}(X^2-1)\left(\alpha(X-1)^{\alpha-1}(X+1)^{n-\alpha} + (n-\alpha)(X-1)^\alpha (X+1)^{n-\alpha-1}\right) = (X-1)^\alpha (X+1)^{n-\alpha}\left(X - \frac{\alpha}{n}(X+1) - \frac{n-\alpha}{n}(X-1)\right) = \left(1 - \frac{2\alpha}{n}\right)P$. Ainsi, les valeurs propres de T sont les $1 - \frac{2\alpha}{n}$, pour $\alpha \in [\![0, n]\!]$, avec $P = (X-1)^\alpha (X+1)^{n-\alpha}$ comme vecteur propre associé.
T est diagonalisable car il a $n + 1 = \dim(E_n)$ valeurs propres distinctes.

Exercice 2 : CCP 2003

I. Polynômes de Tchebychev

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n) = \mathrm{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)(i\sin(\theta))^k\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0\leq 2k\leq n} i^{2k}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta) + \sum_{0\leq 2k+1\leq n} i^{2k+1}\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}(\theta)\sin^{2k+1}(\theta)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta) + i\sum_{0\leq 2k+1\leq n} (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}(\theta)\sin^{2k+1}(\theta)\right)\\
&= \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta) = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^k
\end{aligned}$$

Posons $T = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}X^{n-2k}(1-X^2)^k$. Alors pour tout réel θ

$$T(\cos\theta) = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^k = \cos(n\theta).$$

Ceci démontre l'existence de T_n.

b) Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Alors pour tout réel θ, $P(\cos\theta) = \cos(n\theta) = T(\cos\theta)$ et donc $\forall x \in [-1,1],\ P(x) = T(x)$. Ainsi, les polynômes P et T coïncident en une infinité de valeurs et sont donc égaux. Ceci démontre l'unicité de T.

$$\boxed{T_n = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}X^{n-2k}(1-X^2)^k.}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$ de sorte que $x = \cos(\theta)$. On a alors

$$T_n(x) + T_{n+2}(x) = T_n(\cos(\theta)) + T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2xT_{n+1}(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).}$$

Ainsi, les polynômes $T_n + T_{n+2}$ et $2XT_{n+1}$ coïncident en une infinité de valeurs . Ces polynômes sont donc égaux. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.}$$

b) On a immédiatement $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Puis $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$.

$$\boxed{T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_2 = 2X^2 - 1 \text{ et } T_3 = 4X^3 - 3X.}$$

c) Montrons par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(T_n) = n$ et $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

- T_1 est un polynôme de degré 1 et de coefficent dominant $1 = 2^{1-1}$ et T_2 est un polynôme de degré 2 et de coefficent dominant $2 = 2^{2-1}$. Le résultat est donc vrai quand $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\deg(T_n) = n$, $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$, $\deg(T_{n+1}) = n + 1$ et $\mathrm{dom}(T_{n+1}) = 2^n$. Alors

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(XT_{n+1}) = 1 + (n + 1) = n + 2,$$

et

$$\mathrm{dom}(T_{n+2}) = \mathrm{dom}(2XT_{n+1} - T_n) = \mathrm{dom}(XT_{n+1}) = 2\mathrm{dom}(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}.}$$

D'autre part, $T_0 = 1$ est un polynôme de degré 0 et de coefficient dominant 1.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$ de sorte que $x = \cos(\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\Leftrightarrow T_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $0 \leq k \leq n - 1$, on a

$$0 \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \frac{(2(n-1)+1)\pi}{2n} = \pi - \frac{\pi}{2n} \leq \pi.$$

Comme la fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$, on en déduit que les n nombres $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont n réels deux à deux distincts, tous racines du polynôme T_n. Comme le polynôme T_n est de degré n, ces nombres sont toutes les racines de T_n, nécessairement toutes simples et dans $[-1, 1]$. Enfin, puisque $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$, on a la factorisation

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos(\theta_k)) \text{ où } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [-1, 1]$, en posant $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$, on a

$$|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1,$$

ce qui montre déjà que $\|T_n\|_\infty \leq 1$. Comme d'autre part

$$\|T_n\|_\infty \geq |T_n(1)| = |T_n(\cos(0))| = |\cos(n \times 0)| = 1,$$

on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\|_\infty = 1.}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![0, n]\!]$.

$$|T_n(c_k)| = |T_n(\cos(\frac{k\pi}{n}))| = |\cos(n \times \frac{k\pi}{n})| = |\cos(k\pi)| = 1.$$

Plus précisément, $T_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ et en particulier, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (\forall k \in [\![0, n]\!],\ |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k).}$$

c) $c_0 = \cos(0) = 1$ et $T_3(c_0) = 1$. $c_1 = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $T_3(c_1) = -1$. $c_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $T_3(c_2) = 1$. $c_3 = \cos(\pi) = -1$ et $T_3(c_3) = -1$