PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN

MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Suites & Séries de fonctions
Séries Entieres

Contrôle (2h)

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall x \in I,\ f_0(x) = 1.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.
2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.
3. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.
4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.
6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
   6.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.
   6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.
   On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.
8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. Montrer que l'on a : $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.
9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 2

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2. On note S la fonction somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R, R[$.

3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

Exercice 3

Dans tout le problème :
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :
$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière « usuels », donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :

a. (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;

b. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;

c. (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;

d. La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1, 1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. *Exemple*

Déduire de la question précédente la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

PROBLÈME : Autour du théorème d'ABEL pour les séries entières

Dans tout le problème :
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par : $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :
$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière « usuels », donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :

a. (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;

b. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;

c. (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;

d. La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1, 1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. *Exemple*

Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

2021 - E3A - MP - Mathématiques Unique
Un corrigé

Exercice 1.

1. • On a $\forall x \in I, f(x) = \begin{cases} x^{-x} = e^{-x\ln(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   Par composition de fonctions usuelles continues, f est continue sur $]0,1]$.
   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x\ln(x)} = e^0 = 1 = f(0)$.
   Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } I = [0,1].}$
   • La fonction f_0 est constante donc continue sur $[0,1]$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.
   Par composition de fonctions usuelles continues, f_n est continue sur $]0,1]$.
   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(x))^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$.
   Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } I = [0,1].}$
2. Pour $x = 0$, $f_0(x) = 1$ et $\forall n \geq 1, f_n(x) = 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(0)$ converge simplement vers $1 = f(0)$.
   Soit $x \in]0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n = \dfrac{(-x\ln(x))^n}{n!}$.
   La série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-x\ln(x))^n}{n!}$ est une série exponentielle avec $z = -x\ln(x)$, or cette série converge absolument, donc converge simplement, vers $e^{-x\ln(x)} = x^{-x} = f(x)$.
   Finalement, $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I = [0,1] \text{ vers la fonction } f.}$
3. Soit la fonction φ continue sur I définie par $\forall t \in]0,1], \varphi(t) = t\ln(t)$.
   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ or φ est continue sur I, donc $\varphi(0) = 0$.
   φ est dérivable sur $]0,1]$ et l'on a :
   $$\forall t \in]0,1], \quad \varphi'(t) = \ln(t) + 1.$$
   Ainsi $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(t) = -1 \Leftrightarrow t = e^{-1}$ et $\varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow t > e^{-1}$. On obtient le tableau de variations de φ sur I :

x	0		e^{-1}		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0

4. • Puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi'(t) = -\infty$ et $\varphi(0) = 0$, le graphe de φ admet une tangente verticale d'équation $x = 0$ au point d'abscisse 0.
   • Puisque $\varphi'(1) = 1$ et $\varphi(1) = 0$, le graphe de φ admet une tangente d'équation $y = x - 1$ au point d'abscisse 1.
   • Puisque $\varphi'(e^{-1}) = 0$ et $\varphi(e^{-1}) = -e^{-1}$, le graphe de φ admet une tangente horizontale d'équation $y = -e^{-1}$ au point d'abscisse e^{-1}.
   • On représente ensuite le graphe de la fonction φ sur I en plaçant les tangentes et les trois points du graphe $(0,0)$, $(e^{-1}, -e^{-1})$ et $(1,0)$.
5. La question précédente montre que $|\varphi|$ est bornée sur I et atteint son maximum sur I en e^{-1}, avec $|\varphi(e^{-1})| = e^{-1}$.
   Donc la norme infinie de cette fonction sur I vaut : $\|\varphi\|_{\infty,I} = e^{-1}$.
   La fonction f_0 est bornée sur I et $\|f_0\|_{\infty,I} = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n!}(\varphi(x))^n$. Donc la fonction f_n est bornée sur I et :
   $$\|f_n\|_{\infty,I} = \frac{1}{n!}\left(\|\varphi\|_{\infty,I}\right)^n = \frac{(e^{-1})^n}{n!}.$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_{\infty,I} = \frac{(e^{-1})^n}{n!}.}$

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{(e^{-1})^n}{n!}$ est une série exponentielle (en $z = e^{-1}$), donc elle converge absolument donc simplement.

Puisque la série $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,I} = \sum_{n\geq 0} \frac{(e^{-1})^n}{n!}$ converge, $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge normalement sur } I.}$

6. 6.1. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0,+\infty[, \quad g_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.
   - La fonction g_x est continue sur $]0,+\infty[$.
   - Lorsque $t \to +\infty$, $t^2 g_x(t) = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ donc $g_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

     L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ avec $\alpha = 2 > 1$ converge. Par règle des petits o pour les fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - Lorsque $t \to 0^+$, $g_x(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$.

     L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ converge si et seulement si $\alpha = 1-x < 1$ soit $x > 0$. Par règle des équivalents pour les fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 g_x(t)dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

   Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

   $\boxed{\text{Le domaine de définition de } \Gamma \text{ est } \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[.}$

   6.2. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1.$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une intégration par parties, valable puisque le crochet suivant admet une limite nulle :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \Big[t^n(-e^{-t})\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} nt^{n-1}(-e^{-t})dt = n\Gamma(n).$$

   La formule de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ avec $\Gamma(1) = 1$ conduit à $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1) = n! \text{ .}}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = -\ln(t)$, qui conduit à $t = e^{-u},\ dt = -e^{-u}du$:

$$J_n = \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} (e^{-u}(-u))^n e^{-u}du = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}du.$$

On effectue le changement de variable $v = (n+1)u$, $dv = (n+1)du$:

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \left(\frac{v}{n+1}\right)^n e^{-v}\frac{1}{n+1}dv = (n+1)^{-(n+1)}\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} v^{(n+1)-1}e^{-v}dv.$$

On reconnaît le terme $\Gamma(n+1)$:

$$J_n = (n+1)^{-(n+1)}\frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = (n+1)^{-(n+1)}\frac{1}{n!}n! = (n+1)^{-(n+1)}.$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = (n+1)^{-(n+1)}.}$

Remarquons que cette formule est encore valable pour $n = 0$, puisque $J_0 = \int_0^1 f_0(t)dt = \int_0^1 1dt = 1.$

8. - Par la question **1**, chaque fonction f_n est **continue sur** I**.**
   - Par les questions **2** et **5**, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc **converge uniformément vers** f **sur le segment** I**.**

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions continues convergeant normalement sur un segment :

$$J = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

Donc $\boxed{J = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.}$

9. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-k}$ la somme partielle d'ordre $n \geq 1$ et $R_n = J - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-k}$ le reste partiel d'ordre n.

   Pour $k \geq n$, on a $k+1 \geq n+1$ donc $\dfrac{1}{k^k} \leq \dfrac{1}{(n+1)^k}$.

   On majore le reste partiel par la somme d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{n+1} < 1$, donc convergente :

$$R_n = J - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^n}.$$

   On a $2^{10} = 1024 \geq 10^3$ donc $2^{20} \geq 10^6$.
   Pour $n = 7$: $n(n+1)^n = 7 \times 8^7 \geq 8^7 = (2^3)^7 = 2^{21} \geq 10^6$. Ainsi

$$\forall n \geq n_0 = 7, \quad |S_n - J| = R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{n(n+1)^n} \leq 10^{-6}.$$

   $\boxed{\text{Pour le rang } n_0 = 7, \text{ la somme partielle } S_{n_0} \text{ d'ordre } n_0 \text{ est une valeur approchée de } J \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}}$

CCP 2011. Option MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Exercice2

1. Notons $u_n(x) = \dfrac{2x^n}{n^2-1}$. Il vient que $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ de sorte que $\sum u_n(x)$ converge (absolument) pour $|x| < 1$ et diverge (grossièrement) pour $|x| > 1$. Ainsi $R = 1$. $\square$

2. $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n-1} - \dfrac{x^n}{n+1}$ et les deux séries entières $\sum \dfrac{x^n}{n-1}$ et $\sum \dfrac{x^n}{n+1}$ ont également pour rayon 1 de la même manière que ci-dessus, de sorte que $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ pour $|x| < 1$ car la linéarisation est alors bien licite. Or $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n-1} = x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -x\ln(1-x)$ pour $|x| < 1$ et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1} = \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = \dfrac{1}{x}\big(-\ln(1-x) - x - \dfrac{x^2}{2}\big)$ pour $|x| < 1$ et $x \neq 0$. Ainsi $S(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1-x^2}{x} \ln(1-x)$ pour $|x| < 1$ et $x \neq 0$ et $S(0) = 0$ $\square$

Remarque : on vérifie que l'on a bien $\lim\limits_{x\to 0} \big(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1-x^2}{x} \ln(1-x)\big) = 0$ ce qui était prévisible car S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ donc en particulier continue en 0.

3. Directement $S(1-h) = 1 + \dfrac{1-h}{2} + \dfrac{2-h}{1-h} \times h\ln h \xrightarrow[h\to 0^+]{} \dfrac{3}{2}$ $\square$

Remarque : en fait la série $\sum u_n(x)$ converge clairement normalement sur $[-1,1]$ donc est continue sur $[-1,1]$ par théorème de récupération uniforme de la continuité. Ainsi $\lim\limits_{h\to 0^+} S(1-h) = S(1) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2}{n^2-1} = \dfrac{3}{2}$ comme on peut facilement le voir par télescopage sur une somme partielle.

Exercice 3

1. a. Pour $x \in]-1,1[$ on a $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$. Or $\ln(++x)$ tend vers $\ln(2)$ lorsque $x \to 1^-$ et la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge par théorème spécial. Ainsi la suite (a_n) avec $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ vérifie $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. $\square$

1. b. Pour $x \in]-1,1[$ on a $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. Or $\dfrac{1}{1+x}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque $x \to 1^-$ et la série $\sum (-1)^n$ diverge. Ainsi la suite (a_n) avec $a_n = (-1)^n$ vérifie $\mathcal{P}_2$ mais ne vérifie pas $\mathcal{P}_1$. $\square$

1. c. Pour $x \in]-1,1[$ on a $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Or $\dfrac{1}{1-x}$ n'admet pas de limite finie en 1^- et la série de treme général 1 diverge. La suite constante égale à 1 ne vérifie donc ni $\mathcal{P}_1$ ni $\mathcal{P}_2$. $\square$

1. d. *Première solution* : On sait que si une série de fonctions bornées sur un intervalle I converge uniformément sur I alors la somme de la série est bornée sur I. Dans chacun des trois exemples précedents les fonctions monômes $a_n x^n$ sont bien sûr bornées sur $]-1,1[$ (car continues sur $\mathbb{R}$ et donc bornées sur le compact $[-1,1]$) mais la somme n'est pas bornée sur $]-1,1[$. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $]-1,1[$. $\square$

Seconde solution : La série de l'exemple c ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ car, pour $x \in]-1,1[$, $R_n(x) \underset{\text{DEF}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ et la suite (R_n) ne converge donc pas uniformément vers 0 sur $]-1,1[$ puisque $\operatorname*{Sup}_{x \in]-1,1[} |R_n(x)| = +\infty$. $\square$

2. Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$ et sa somme $S(x)$ est donc une fonction continue sur $[-1,1]$ par théorème de récupération uniforme de la continuité.

Il vient alors $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. $\square$

3. La série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$ a pour rayon 1 et la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente. Il en résulte, d'après la question précédente, que $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ en notant $f(x) = \sum_{n \geqslant 2} \dfrac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$.

Or $S_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k x^k}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\dfrac{(-1)^k x^k}{k-1} - \dfrac{(-1)^k x^k}{k}\right) = x \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$.

Donc $f(x) = x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x$ pour $x \in]-1,1[$. Ainsi $\sum_{n \quad 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$. $\square$

$\geqslant$

4. a. Il vient $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$ de sorte que, pour $x \in [0,1]$ (puisque $\sum a_n$ converge) :
$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = R_n(x)$. $\square$

4. b. Or la série $\sum r_n x^n$ converge pour $x \in [0,1[$ car $(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc pour n assez grand on a $|r_n x^n| \leqslant |x|^n$.
On peut donc linéariser dans le résultat précédent et :
$R_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p-1} x^{n+p} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p} = r_n x^{n+1} + \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p+1} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p}$ et donc :
$R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$ pour $x \in [0,1[$. $\square$

4. c. La suite (r_n) tend vers 0 d'où l'existence d'un entier n_0 tel que $|r_k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout entier $k \geqslant n_0$ c'est à dire encore $|r_{n+p}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ et tout entier p. $\square$

Pour $x \in [0,1[$ et $n \geqslant n_0$ la question précédente montre alors que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + (1-x)\dfrac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \varepsilon$.
C'est encore vrai pour $x = 1$ car alors $R_n(1) = r_n$.
Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ donné quelconque, il existe un entier n_0 tel que $|R_n(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \geqslant n_0$. $\square$

4. d. Cela prouve (par définition) que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et que sa somme $S(x)$ est donc une fonction continue sur $[0,1]$. Il vient alors : $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. $\square$

5. Il en découle par contraposée que si $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ alors la série $\sum a_n$ ne converge pas. $\square$

6. Par intégration terme à terme de 0 à $x \in]-1,1[$ du développement en série entière de $\dfrac{1}{1+t^2}$ il vient que :
$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in]-1,1[$ et comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par théorème spécial, le théorème d'Abel montre que $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. $\square$

7. a. Le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ par elle même a pour terme général $w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}}$.

Or $k(n-k) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ (car $(n-2k)^2 \geqslant 0$) de sorte que $|w_n| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$ ce qui prouve la divergence grossière de la série $\sum w_n$. $\square$

7. b. Posons $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $x \in]-1,1]$ ce qui est licite puisque $\sum u_n$ converge et donc que le rayon de convergence est au moins 1. De même pour $V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes prouve que $W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$ converge absolument sur $]-1,1[$ et que $W(x) = U(x)V(x)$ pour $x \in]-1,1|$. Puisque les trois séries de l'énoncé convergent, le théorème d'Abel montre $\lim_{x\to1^-} U(x) = U(1)$. Idem pour $V(x)$ et $W(x)$. En passant à la limite en 1^- dans $W(x) = U(x)V(x)$ sur $]-1,1[$ il vient $W(1) = U(1)V(1)$. $\square$

8. Cf question 1.b. $\square$