

## Devoir Maison

# Equations Différentielles

CNC 2023

### Exercice

Un problème d'extremum  
(Noté sur 4 points sur 20)

On considère la fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

#### 1. Quelques propriétés de la fonction $F$

1.1. Justifier que la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

1.2. Montrer que la fonction  $F$  admet un unique point critique  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et le déterminer.

#### 2. Étude de la nature du point critique $(x_0, y_0)$

2.1. Calculer les dérivées partielles secondes de  $F$  au point  $(x_0, y_0)$ .

2.2. À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction  $F$  présente un extremum local au point  $(x_0, y_0)$ . Est-ce un minimum ou un maximum local ?

#### 3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ; on pose  $u = x$  et  $v = y - 3$ . Vérifier que  $F(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9$ .

3.2. Montrer qu'en fait la fonction  $F$  présente un extremum absolu strict au point  $(x_0, y_0)$ .

*On pourra remarquer que*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}.$$

### Problème

Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

#### Notations

Dans ce problème,  $I$  désigne un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue; on note  $(\mathcal{L}_f)$  l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f. \quad (\mathcal{L}_f)$$

Si  $x_0 \in I$ , on définit la fonction  $\varphi_{f, x_0} : I \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in I, \quad \varphi_{f, x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

---

## 1<sup>ère</sup> Partie

### Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{L}_f)$

#### Application au cas où $f$ est $2\pi$ -périodique

**1.1.** Montrer que l'ensemble  $\Sigma_0$  des solutions, sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle  $y'' + y = 0$  est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

**1.2. Recherche d'une solution particulière de  $(\mathcal{L}_f)$**

Pour tout  $x \in I$ , on pose  $\varphi_1(x) = \int_{x_0}^x f(t) \cos t \, dt$  et  $\varphi_2(x) = \int_{x_0}^x f(t) \sin t \, dt$ .

**1.2.1.** Justifier que les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont dérivables sur  $I$  et exprimer  $\varphi_1'(x)$  et  $\varphi_2'(x)$  pour tout  $x \in I$ .

**1.2.2.** Montrer que, pour tout  $x \in I$ ,  $\varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x) \sin x - \varphi_2(x) \cos x$ . Que vaut  $\varphi_{f,x_0}(x_0)$  ?

**1.2.3.** En déduire que  $\varphi_{f,x_0}$  est dérivable sur  $I$  et exprimer  $\varphi_{f,x_0}'(x)$  pour tout  $x \in I$ . Que vaut  $\varphi_{f,x_0}'(x_0)$  ?

**1.2.4.** Montrer que  $\varphi_{f,x_0}$  est deux fois dérivable sur  $I$  et qu'elle est solution, sur  $I$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$ .

**1.2.5.** Montrer que  $\varphi_{f,x_0}$  est l'unique solution, sur  $I$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  s'annulant ainsi que sa dérivée en  $x_0$ .

**1.3. Expression intégrale des solutions de  $(\mathcal{L}_f)$**

Montrer que les solutions, sur  $I$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) \, dt, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

**1.4. Étude de la périodicité des solutions de  $(\mathcal{L}_f)$  dans le cas où  $f$  est  $2\pi$ -périodique**

*Dans cette section, on suppose que  $I = \mathbb{R}$  et que  $f$  est  $2\pi$ -périodique.*

**1.4.1.** On suppose que l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  possède une solution  $2\pi$ -périodique  $g$ .

(i) Montrer qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) \, dt.$$

(ii) En déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) \, dt = 0$ .

(iii) Montrer que  $\int_0^{2\pi} f(t) \sin(t) \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) \, dt = 0$ .

**1.4.2.** On suppose ici que  $\int_0^{2\pi} f(t) \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = 0$ .

(i) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) \, dt = 0$ .

(ii) En déduire, d'abord que  $\varphi_{f,0}$  est  $2\pi$ -périodique, puis justifier qu'il en est de même de toutes les solutions de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$ .

**1.4.3.** Si  $f$  est la fonction sinus, l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  possède-t-elle des solutions  $2\pi$ -périodiques ?

## 2<sup>ème</sup> Partie

### Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ , dite de DIRICHLET.

**2.1. Convergence d'intégrales**

**2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET**

- (i) Montrer que la fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$  est intégrable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- (ii) Montrer que, pour tout réel  $x > 0$ ,  $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ .
- (iii) Montrer soigneusement que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.

**2.1.2.** Montrer que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  est également convergente.

**2.2. Étude de solutions de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  lorsque  $I = ]0, +\infty[$  et  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$**

Dans cette section, on suppose que  $I = ]0, +\infty[$  et que  $f$  est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . On cherche à montrer, par analyse-synthèse, que l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  admet une unique solution, sur  $]0, +\infty[$ , ayant 0 pour limite en  $+\infty$ .

**2.2.1. Analyse :** On suppose que  $\psi$  est une solution, sur  $]0, +\infty[$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  ayant 0 pour limite en  $+\infty$ .

- (i) Montrer qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall x > 0, \quad \psi(x) = \left( \lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \cos x + \left( \mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \right) \sin x.$$

- (ii) Montrer que  $\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et que  $\mu = - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ . On pourra considérer les suites numériques  $(\psi(2n\pi))_{n \geq 1}$  et  $(\psi(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))_{n \geq 1}$ .

- (iii) En déduire que, pour tout  $x > 0$ ,  $\psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$ .

**2.2.2. Synthèse :** Montrer que la fonction  $\psi_1 : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$  est effectivement solution, sur  $]0, +\infty[$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  et qu'elle admet 0 pour limite en  $+\infty$ .

**2.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre**

- 2.3.1.** Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$  est intégrable sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

Dans la suite de cette partie, on pose  $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt, \quad x \geq 0$ .

**2.3.2.** Calculer  $h(0)$ .

**2.3.3.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction  $h$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

**2.3.4.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction  $h$  admet 0 pour limite en  $+\infty$ .

**2.3.5.** Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la fonction  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle ouvert  $]0, +\infty[$ , puis donner une expression de  $h''$  sous forme intégrale.

- 2.3.6.** Montrer que, pour tout réel  $x > 0$ ,  $h''(x) + h(x) = \frac{1}{x}$ .

- 2.3.7.** En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{x+s} ds$ .

**2.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet**

On reprend ici les notations de la section précédente.

- 2.4.1.** Montrer que, pour tout réel  $x > 0$ ,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt + x \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right|.$$

- 2.4.2.** En déduire que pour tout réel  $x > 0$ ,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt.$$

- 2.4.3.** Montrer soigneusement que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$ .

---

**3<sup>ème</sup> Partie**  
**Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de fonctions définies sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

**3.1.** Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

**3.2.** Montrer que, pour tout  $a > 0$ , les séries de fonctions  $\sum_{n \geq 1} nu_n$  et  $\sum_{n \geq 1} n^2 u_n$  convergent normalement sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

Dans la suite de cette partie, on pose  $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \geq 0.$

**3.3. Quelques propriétés de la fonction  $u$**

**3.3.1.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction  $u$  est continue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

**3.3.2.** Montrer de même que la fonction  $u$  admet 0 pour limite en  $+\infty$ .

**3.3.3.** Montrer que la fonction  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et donner une expression de sa dérivée seconde sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

**3.3.4.** Montrer que

$$\forall x > 0, \quad u''(x) + u(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

**3.3.5.** En utilisant les résultats de la première partie du problème, montrer qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall x > 0, \quad u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{1}{e^t - 1} \sin(x - t) dt.$$

**3.4. Une autre expression intégrale de la fonction  $u$**

**3.4.1.** Montrer que, pour tout  $a > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

**3.4.2.** En déduire que, pour tout  $a > 0$ , les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \sin t$  et  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \cos t$  sont intégrables sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

**3.4.3.** Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $u(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{e^{x+s} - 1} ds.$

**3.5.** Justifier que la fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$  est intégrable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et montrer, en précisant le théorème utilisé, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

**Concours National Commun**  
**Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I**  
**Session 2023 - Filière MP**

1

**Exercice**

**Un problème d'extremum**

On considère la fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

**1. Quelques propriétés de la fonction  $F$**

**1.1**  $F$  est une fonction polynomiale donc elle est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 6$$

**1.2**  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $F$  si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 3 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

ce système admet une solution unique  $(x_0, y_0) = (0, 3)$ , qui est l'unique point critique de  $F$ .

**2. Étude de la nature du point critique  $(x_0, y_0)$**

**2.1** On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

**2.2** La matrice Hessienne de  $F$  au point  $(x_0, y_0)$  s'écrit

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est  $X^2 - 4X + 3$  dont les racines sont  $\{1, 3\}$ .

$H_f(x_0, y_0)$  est symétrique réelle et admet deux valeurs propres strictement positives, elle est donc symétrique définie et positive, par suite  $(x_0, y_0)$  est un minimum local.

**3. Étude plus approfondie de l'extremum en question**

**3.1** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ; on pose  $u = x$  et  $v = y - 3$  donc  $x = u$  et  $y = v + 3$ , on remplace dans  $F$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= u^2 + u(v + 3) + (v + 3)^2 - 3u - 6(v + 3) \\ &= u^2 + uv + 3u + v^2 + 6v + 9 - 3u - 6v - 18 \\ &= u^2 + uv + v^2 - 9 \end{aligned}$$

---

1.

**3.2** On a  $F(x_0, y_0) = -9$  donc

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x_0, y_0) &= u^2 + uv + v^2 \\ &= \left( u^2 + 2 \cdot u \frac{v}{2} + \frac{v^2}{4} \right) + \frac{3v^2}{4} \\ &= \left( u + \frac{v}{2} \right)^2 + \frac{3v^2}{4} \end{aligned}$$

par suite  $F(x, y) - F(x_0, y_0) \geq 0$  pour tout  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , cette inégalité est stricte si  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$  donc  $F$  présente un minimum absolu strict au point  $(x_0, y_0)$ .

## Problème

### Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

#### Notations

$I$  désigne un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue ; on note  $(\mathcal{L}_f)$  l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f$$

#### 1<sup>ère</sup> Partie

**Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  Application au cas où  $f$  est  $2\pi$ -périodiques .**

**1.1**  $\Sigma_0$  est une partie non vide de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ,  $0 \in \Sigma_0$ , stable par combinaison linéaire (*simple à vérifier*), donc c'est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ .

Les solutions réelles de cette équation, linéaire homogène de second ordre, sont de la forme

$$y : x \mapsto a \cos x + b \sin x$$

donc  $\Sigma_0$  est de dimension 2 dont une base est la famille  $(\cos, \sin)$ .

**1.2 Recherche d'une solution particulière de  $(\mathcal{L}_f)$**

Pour tout  $x \in I$ , on pose  $\varphi_1(x) = \int_{x_0}^x f(t) \cos t \, dt$  et  $\varphi_2(x) = \int_{x_0}^x f(t) \sin t \, dt$ .

**1.2.1**  $f$  est continue sur  $I$  donc les fonctions  $t \mapsto f(t) \cos t$  et  $t \mapsto f(t) \sin t$  sont continues, par suite  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $\varphi_1'(x) = f(x) \cos x$  et  $\varphi_2'(x) = f(x) \sin x$  pour tout  $x \in I$ .

**1.2.2** Soit  $x \in I$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi_{f, x_0}(x) &= \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) \, dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t) (\sin(x) \cos(t) - \cos(x) \sin(t)) \, dt \\ &= \sin(x) \int_{x_0}^x f(t) \cos(t) \, dt - \cos(x) \int_{x_0}^x f(t) \sin(t) \, dt \\ &= \varphi_1(x) \sin x - \varphi_2(x) \cos x \end{aligned}$$

Donc  $\varphi_{f, x_0}(x_0) = 0$ .

**1.2.3**  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont dérivables sur  $I$  donc  $\varphi_{f, x_0}$  l'est aussi et

$$\begin{aligned} \varphi'_{f, x_0}(x) &= \varphi_1'(x) \sin x + \varphi_1(x) \cos x - \varphi_2'(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x \\ &= f(x) \cos x \cdot \sin x + \varphi_1(x) \cos x - f(x) \sin x \cdot \cos x + \varphi_2(x) \sin x \\ &= \varphi_1(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi'_{f, x_0}(x_0) = 0$ .

**1.2.4**  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont dérivables sur  $I$  donc  $\varphi'_{f,x_0}$  est dérivable sur  $I$  par suite  $\varphi_{f,x_0}$  est deux fois dérivable sur  $I$  et

$$\begin{aligned}\varphi''_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x) \cos x - \varphi_1(x) \sin x + \varphi'_2(x) \sin x + \varphi_2(x) \cos x \\ &= f(x) \cos^2 x - \varphi_1(x) \sin x + f(x) \sin^2 x + \varphi_2(x) \cos x \\ &= f(x) + \varphi_1(x) \sin x - \varphi_2(x) \cos x \\ &= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x)\end{aligned}$$

ainsi  $\varphi_{f,x_0}$  est solution, sur  $I$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$

**1.2.5** Soit  $\psi$  une solution de  $(\mathcal{L}_f)$  telle que  $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$ , posons  $Y = \psi - \varphi_{f,x_0}$ , alors elle vérifie  $Y'' + Y = 0$  et il existe  $a$  et  $b$  tel que  $y(x) = a \cos x + b \sin x$  de plus on a  $Y(x_0) = Y'(x_0) = 0$  donc

$$\begin{cases} a \cos x_0 + b \sin x_0 = 0 \\ -a \sin x_0 + b \cos x_0 = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système est égale 1, sa matrice est inversible il admet donc une unique solution et  $a = b = 0$  d'où  $Y = 0$  et  $\psi = \varphi_{f,x_0}$ .

Ainsi  $\varphi_{f,x_0}$  est l'unique solution, sur  $I$ , du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

**1.3.** De la même façon, si  $\psi$  une solution de  $(\mathcal{L}_f)$  sur  $I$ , alors  $y = \psi - \varphi_{f,x_0}$  vérifie  $y'' + y = 0$ , donc il existe  $a$  et  $b$  tel que  $y(x) = a \cos x + b \sin x$ , d'où

$$\psi(x) = a \cos x + b \sin x + \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) dt$$

ce qui donne le résultat.

**1.4.** On suppose que  $I = \mathbb{R}$  et que  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

**1.4.1.** Soit  $g$  une solution  $2\pi$ -périodique de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$ .

i) D'après 1.3 avec  $x_0 = 0$ , il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

ii) Soit  $x$  un réel, on a  $g(x) = g(x+2\pi)$  donc

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x+2\pi-t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt$$

la relation de Chasles donne  $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$ .

iii) En particulier

$$\rightarrow \text{Si } x = 0 \text{ alors } \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t) dt = 0.$$

$$\rightarrow \text{Si } x = \frac{\pi}{2} \text{ alors}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt = 0.$$

écrivons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(t) \cos(t) dt + \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt + \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt.$$

un changement de variable  $t = u + 2\pi$  donne

$$\int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u + 2\pi) \cos(u + 2\pi) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \cos(u) du.$$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt = 0$$

**1.4.2.** On suppose ici que  $\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt = 0$ .

i) Soit  $x$  un réel, on a

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_x^0 f(t) \sin(x-t) dt + \int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) dt + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$$

le changement de variable  $t = u + 2\pi$  donne  $\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$ , donc

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) dt$$

d'autre part

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \sin(x) \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt}_{=0} - \cos(x) \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t) \sin(t) dt}_{=0} = 0$$

d'où

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ii) On a  $\varphi_{f,0}(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$  et

$$\begin{aligned} \varphi_{f,0}(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt \\ &= \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt + \int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt \end{aligned}$$

d'après i)  $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$  donc  $\varphi_{f,0}(x+2\pi) = \varphi_{f,0}(x)$  et  $\varphi_{f,0}$  est  $2\pi$ -périodique.

Soit  $g$  une solution de  $(\mathcal{L}_f)$ , il existe  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \\ &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \varphi_{f,0}(x) \end{aligned}$$

$\varphi_{f,0}$ ,  $\cos$  et  $\sin$  sont  $2\pi$ -périodiques donc  $g$  est  $2\pi$ -périodique.

**1.4.3.** Si  $f(x) = \sin(x)$ , les solutions de  $(\mathcal{L}_f)$  sont de la forme

$g : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + \varphi_{f,0}(x)$  avec

$$\begin{aligned} \varphi_{f,0}(x) &= \int_0^x \sin(t) \sin(x-t) dt \\ &= \sin(x) \int_0^x \sin(t) \cos(t) dt - \cos(x) \int_0^x \sin^2(t) dt \end{aligned}$$

on a

$$\int_0^x \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \sin^2(x)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin^2(t) dt &= \int_0^x \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \end{aligned}$$

ainsi

$$\varphi_{f,0}(x) = \frac{1}{2} \sin^3(x) - \cos(x) \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right)$$

$\varphi_{f,0}$  n'est pas  $2\pi$ -périodique donc l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  n'admet pas de solution  $2\pi$ -périodique.

## 2<sup>ème</sup> Partie

### Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

#### 2.1. Convergence d'intégrales

##### 2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

i) La fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

→ En 0 : On a  $\frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1 - (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$  donc  $\frac{1 - \cos t}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$ .

La fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$  est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur  $]0, 1]$ .

→ En  $+\infty$  :  $\left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  donc  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

D'où la fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

ii) Soit  $x > 0$ . On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt &= \int_1^x \frac{(1 - \cos t)'}{t} dt \\ &= \left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

iii) → On a  $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$  donc  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est prolongeable par continuité en 0 et elle est intégrable sur  $]0, 1]$  ainsi l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$  converge.

→ D'après i) la fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$

converge et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ , ainsi  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge.

D'où l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.

2.1.2. Soit  $x > 0$ . On a

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt &= \int_1^x \frac{(\sin t)'}{t} dt \\ &= \left[ \frac{\sin t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt \end{aligned}$$

$\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ , donc  $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$  converge et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , ainsi l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  est convergente.

2.2.  $I = ]0, +\infty[$  et  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ .

2.2.1. Analyse : On suppose que  $\psi$  est une solution, sur  $]0, +\infty[$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_f)$  ayant 0 pour limite en  $+\infty$ .

i) Soit  $x \in ]0, +\infty[$ , d'après 1.3 avec  $x_0 = 1$ , il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt \\ &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt - \cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \left( \lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \cos x + \left( \mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \right) \sin x\end{aligned}$$

ii)  $\psi$  tend vers 0 en  $+\infty$  donc les deux suites  $(\psi(2n\pi))_{n \geq 1}$  et  $(\psi(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))_{n \geq 1}$  convergent vers 0 en  $+\infty$ . On a

$$\psi(2n\pi) = \lambda - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = (-1)^n \left( \mu + \int_1^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \frac{\cos t}{t} dt \right)$$

par passage à la limite en  $+\infty$  on obtient

$$\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \mu = - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

iii) On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left( \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \cos x + \left( - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \right) \sin x \\ &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt.\end{aligned}$$

**2.2.2. Synthèse :** d'après la question précédente on a

$$\psi_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt$$

avec  $\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et  $\mu = - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ , donc  $\psi_1$  est solution de  $(\mathcal{L}_f)$  sur  $]0, +\infty[$ .

Et aussi

$$\psi_1(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

donc

$$|\psi_1(x)| \leq \left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| + \left| \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right|$$

les deux intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  convergent donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = 0$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_1(x) = 0$ .

Ainsi  $\psi_1$  est solution, sur  $]0, +\infty[$ , de  $(\mathcal{L}_f)$  et elle admet 0 pour limite en  $+\infty$ .

## 2.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

**2.3.1.** Soit  $x \geq 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $\left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$

est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , donc la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$  l'est aussi.

On pose  $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ ,  $x \geq 0$ .

**2.3.2.**  $h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ .

**2.3.3.** La fonction  $(x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[ \times [0, +\infty[$  et elle est dominée par la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  qui est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre donne la continuité de  $h$  sur  $[0, +\infty[$ .

**2.3.4.** Pour tout  $x > 0$  on a  $|h(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ , donc  $h$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
(on peut le faire avec le théorème de la convergence dominée...)

**2.3.5.** La fonction  $g : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$$

Soit  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ , on a  $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{b^2 e^{-at}}{1+a^2} = \varphi(t)$ , la fonction  $\varphi$  est intégrable. Donc  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$  pour tout  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$  par suite  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$h''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

**2.3.6.** Soit  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} h''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1 - 1)e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{x} - h(x) \end{aligned}$$

d'où  $h''(x) + h(x) = \frac{1}{x}$ .

**2.3.7.**  $h$  est solution, sur  $]0, +\infty[$ , de  $(\mathcal{L}_f)$  et elle admet 0 pour limite en  $+\infty$ , d'après 2.2.2 on a

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t} dt \stackrel{t=x+s}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{x+s} ds$$

## 2.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet.

**2.4.1.** Soit  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right| \\ &\leq x \left| \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt \right| + x \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right| \end{aligned}$$

et  $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt \geq 0$  donc

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt + x \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right|$$

**2.4.2.** Soit  $x > 0$ , on a :

→ pour tout  $t$  dans  $]0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$  donc

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = \ln(x+1) - \ln x$$

→ pour tout  $t$  dans  $[1, +\infty[$   $\frac{1}{t(x+t)} \leq \frac{1}{t^2}$  par suite

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t(x+t)} \right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(x+t)} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

d'où

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

**2.4.3.** De la question précédente on a

$$\left| h(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \quad \forall x > 0$$

et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \right) = 0$  par suite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ . or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = \frac{\pi}{2}$   
donc  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

### 3<sup>ème</sup> Partie

#### Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de fonctions définies sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

**3.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $x \mapsto e^{-nx}$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ , donc  $\sup_{x \in [0, +\infty[} |u_n(x)| = \frac{1}{1+n^2}$ , la série  $\sum \frac{1}{1+n^2}$  converge donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

**3.2.** Soit  $a > 0$ , on a  $\sup_{x \in [a, +\infty[} |nu_n(x)| = \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$  et  $\sup_{x \in [a, +\infty[} |n^2u_n(x)| = \frac{n^2e^{-na}}{1+n^2}$ .

Pour tout  $\alpha \geq 0$  on a  $\frac{n^\alpha e^{-na}}{1+n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum \frac{n^\alpha e^{-na}}{1+n^2}$  converge, on en déduit que les séries de fonctions  $\sum_{n \geq 1} nu_n$  et  $\sum_{n \geq 1} n^2u_n$  convergent normalement sur l'intervalle  $[a, +\infty[$

On pose  $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ ,  $x \geq 0$ .

#### 3.3. Quelques propriétés de la fonction $u$

**3.3.1.** La série de fonction  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, +\infty[$  et les fonctions  $u_n$  sont continue sur  $[0, +\infty[$ , le théorème de continuité des série de fonctions assure la continuité de  $u$  sur  $[0, +\infty[$ .

**3.3.2.** La série de fonction  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, +\infty[$  et  $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , le théorème d'inversion de limite et somme donne :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$$

Autre méthode : si  $x > 0$  alors  $|u(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ .

**3.3.3.** Les fonction  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et  $u_n''(x) = \frac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2}$ .

Soit  $a > 0$ , d'après 3.2 la serie  $\sum_{n \geq 1} u_n''$  converge normalement et uniformément sur  $[a, +\infty[$ , donc  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, +\infty[$ , ceci est valable pour tout  $a > 0$ , par suite  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$u''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2}.$$

**3.3.4.** Soit  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} u''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 + 1 - 1)e^{-nx}}{1+n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - u(x) \end{aligned}$$

d'où

$$u''(x) + u(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

**3.3.5.**  $u$  est une solution, sur  $]0, +\infty[$ , de l'équation différentielle  $\mathcal{L}_f$  avec  $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ , d'après 1.3 (avec  $x_0 = 1$ ) il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall x > 0, \quad u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{1}{e^t - 1} \sin(x - t) dt$$

### 3.4. Une autre expression intégrale de la fonction $u$

**3.4.1.** Soit  $a > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$  est continue sur  $[a, +\infty[$  et  $\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$  donc la fonction  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

**3.4.2.** Soit  $a > 0$ , on a  $\left| \frac{1}{e^t - 1} \sin t \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$  et  $\left| \frac{1}{e^t - 1} \cos t \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$  donc les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \sin t$  et  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \cos t$  sont intégrables sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

**3.4.3.** Soit  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{1}{e^t - 1} \sin(x - t) dt \\ &= \cos x \left( \alpha - \int_1^x \frac{\sin t}{e^t - 1} dt \right) + \sin x \left( \beta + \int_1^x \frac{\cos t}{e^t - 1} dt \right) \end{aligned}$$

d'après 3.3.2 on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ , par analogie avec la question 2.2.1 les suites  $(u(2n\pi))_{n \geq 1}$  et  $(u(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))_{n \geq 1}$  convergent vers 0 en  $+\infty$  ce qui donne

$$\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt \quad \text{et} \quad \beta = - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{e^t - 1} dt \quad (\text{les deux intégrales convergentes d'après 3.4.2})$$

donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{e^t - 1} dt \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t - x)}{e^t - 1} dt \\ &\stackrel{t=s+x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{e^{x+s} - 1} ds \end{aligned}$$

Ce qui prouve, aussi, que  $u$  est l'unique solution, sur  $]0, +\infty[$ , de  $(\mathcal{L}_f)$  qui admet 0 pour limite en  $+\infty$ .

**3.5.** Posons  $\varphi : t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$

• On a :

$\rightarrow \frac{\sin t}{e^t - 1} = \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{e^t - 1}{t}}$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{e^t - 1} = 1$ , la fonction  $\varphi$  est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur l'intervalle  $]0, 1]$ .

$\rightarrow \left| \frac{1}{e^t - 1} \sin t \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$  et  $\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$  donc la fonction  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  par suite  $\varphi$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

Ainsi la fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

• Soit  $t > 0$ , le développement en série entière de  $\frac{1}{1-z}$  pour  $|z| < 1$  conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\sin t}{e^t - 1} &= \frac{e^{-t} \sin t}{1 - e^{-t}} \quad (e^{-t} < 1) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t e^{-nt} \end{aligned}$$

posons  $f_n : t \mapsto \sin t e^{-nt}$ .

**Première méthode :** Par le théorème d'interversion de  $\sum$  et  $\int$ .

▷ les fonctions  $f_n$  sont continues et  $|f_n(t)| \leq e^{-nt}$  donc les  $f_n$  sont intégrables sur  $]0, +\infty[$ .

▷ la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement vers  $\varphi$  qui est continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

▷ de plus, on a :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt$$

et

$$\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt \stackrel{x=nt}{=} \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{n^2}$$

donc la série  $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$  converge .

Le théorème d'interversion de  $\sum$  et  $\int$  donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right)$$

et on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} \sin t e^{-nt} dt \\ &= \operatorname{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{(i-n)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \left[ \frac{e^{(i-n)t}}{i-n} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{1}{n-i} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{n+i}{n^2+1} \right) \end{aligned}$$

ainsi  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{n^2+1}$  et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

**Deuxieme methode :** Par le théorème de convergence dominée

Posons  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , on a :

▷ les fonctions  $f_n$  et  $\varphi$  sont intégrables sur  $]0, +\infty[$ .

▷ les fonctions  $S_n$  sont donc continues et intégrables sur  $]0, +\infty[$  et la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement sur  $]0, +\infty[$  vers  $\varphi$ .

De plus, on a :

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\sin t| e^{-kx} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\sin t| e^{-kx} = \frac{|\sin t|}{e^x - 1}$$

donc  $|S_n(x)| \leq |\varphi(x)|$  avec  $|\varphi|$  continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Le théorème de convergence dominée appliqué à la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donne alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} f_k(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \end{aligned}$$

••• FIN •••