

Devoir Maison

Equations Différentielles

CNC 2023

Exercice

Un problème d'extremum
(Noté sur 4 points sur 20)

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1. Justifier que la fonction F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de \mathbb{R}^2 .

1.2. Montrer que la fonction F admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et le déterminer.

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1. Calculer les dérivées partielles secondes de F au point (x_0, y_0) .

2.2. À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction F présente un extremum local au point (x_0, y_0) . Est-ce un minimum ou un maximum local ?

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$. Vérifier que $F(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9$.

3.2. Montrer qu'en fait la fonction F présente un extremum absolu strict au point (x_0, y_0) .

On pourra remarquer que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}.$$

Problème

Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

Notations

Dans ce problème, I désigne un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue; on note (\mathcal{L}_f) l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f. \quad (\mathcal{L}_f)$$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f, x_0} : I \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad \varphi_{f, x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

1^{ère} Partie

Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) Application au cas où f est 2π -périodique

1.1. Montrer que l'ensemble Σ_0 des solutions, sur \mathbb{R} , de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

1.2. Recherche d'une solution particulière de (\mathcal{L}_f)

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \int_{x_0}^x f(t) \cos t \, dt$ et $\varphi_2(x) = \int_{x_0}^x f(t) \sin t \, dt$.

1.2.1. Justifier que les fonctions φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$.

1.2.2. Montrer que, pour tout $x \in I$, $\varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x) \sin x - \varphi_2(x) \cos x$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$?

1.2.3. En déduire que φ_{f,x_0} est dérivable sur I et exprimer $\varphi_{f,x_0}'(x)$ pour tout $x \in I$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}'(x_0)$?

1.2.4. Montrer que φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et qu'elle est solution, sur I , de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) .

1.2.5. Montrer que φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I , de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0 .

1.3. Expression intégrale des solutions de (\mathcal{L}_f)

Montrer que les solutions, sur I , de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) \, dt, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

1.4. Étude de la périodicité des solutions de (\mathcal{L}_f) dans le cas où f est 2π -périodique

Dans cette section, on suppose que $I = \mathbb{R}$ et que f est 2π -périodique.

1.4.1. On suppose que l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) possède une solution 2π -périodique g .

(i) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) \, dt.$$

(ii) En déduire que, pour tout réel x , $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) \, dt = 0$.

(iii) Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t) \sin(t) \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) \, dt = 0$.

1.4.2. On suppose ici que $\int_0^{2\pi} f(t) \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = 0$.

(i) Montrer que, pour tout réel x , $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) \, dt = 0$.

(ii) En déduire, d'abord que $\varphi_{f,0}$ est 2π -périodique, puis justifier qu'il en est de même de toutes les solutions de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) .

1.4.3. Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) possède-t-elle des solutions 2π -périodiques ?

2^{ème} Partie

Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$, dite de DIRICHLET.

2.1. Convergence d'intégrales

2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

- (i) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- (ii) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$.
- (iii) Montrer soigneusement que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

2.1.2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ est également convergente.

2.2. Étude de solutions de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) lorsque $I =]0, +\infty[$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Dans cette section, on suppose que $I =]0, +\infty[$ et que f est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. On cherche à montrer, par analyse-synthèse, que l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) admet une unique solution, sur $]0, +\infty[$, ayant 0 pour limite en $+\infty$.

2.2.1. Analyse : On suppose que ψ est une solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) ayant 0 pour limite en $+\infty$.

- (i) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0, \quad \psi(x) = \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \right) \sin x.$$

- (ii) Montrer que $\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et que $\mu = - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$. On pourra considérer les suites numériques $(\psi(2n\pi))_{n \geq 1}$ et $(\psi(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))_{n \geq 1}$.

- (iii) En déduire que, pour tout $x > 0$, $\psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$.

2.2.2. Synthèse : Montrer que la fonction $\psi_1 : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$ est effectivement solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) et qu'elle admet 0 pour limite en $+\infty$.

2.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

2.3.1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Dans la suite de cette partie, on pose $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt, \quad x \geq 0$.

2.3.2. Calculer $h(0)$.

2.3.3. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction h est continue sur $[0, +\infty[$.

2.3.4. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction h admet 0 pour limite en $+\infty$.

2.3.5. Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la fonction h est de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, puis donner une expression de h'' sous forme intégrale.

2.3.6. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $h''(x) + h(x) = \frac{1}{x}$.

2.3.7. En déduire que pour tout $x > 0$, $h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{x+s} ds$.

2.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

On reprend ici les notations de la section précédente.

2.4.1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt + x \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right|.$$

2.4.2. En déduire que pour tout réel $x > 0$,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt.$$

2.4.3. Montrer soigneusement que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

3^{ème} Partie
Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

3.1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3.2. Montrer que, pour tout $a > 0$, les séries de fonctions $\sum_{n \geq 1} nu_n$ et $\sum_{n \geq 1} n^2 u_n$ convergent normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Dans la suite de cette partie, on pose $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \geq 0.$

3.3. Quelques propriétés de la fonction u

3.3.1. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction u est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3.3.2. Montrer de même que la fonction u admet 0 pour limite en $+\infty$.

3.3.3. Montrer que la fonction u est de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée seconde sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

3.3.4. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad u''(x) + u(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

3.3.5. En utilisant les résultats de la première partie du problème, montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0, \quad u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{1}{e^t - 1} \sin(x - t) dt.$$

3.4. Une autre expression intégrale de la fonction u

3.4.1. Montrer que, pour tout $a > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est intégrable sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

3.4.2. En déduire que, pour tout $a > 0$, les fonctions $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \sin t$ et $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \cos t$ sont intégrables sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

3.4.3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $u(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{e^{x+s} - 1} ds.$

3.5. Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et montrer, en précisant le théorème utilisé, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours National Commun
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I
Session 2023 - Filière MP

1

Exercice

Un problème d'extremum

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1 F est une fonction polynomiale donc elle est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 6$$

1.2 (x_0, y_0) est un point critique de F si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 3 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

ce système admet une solution unique $(x_0, y_0) = (0, 3)$, qui est l'unique point critique de F .

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1 On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

2.2 La matrice Hessienne de F au point (x_0, y_0) s'écrit

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 3$ dont les racines sont $\{1, 3\}$.

$H_f(x_0, y_0)$ est symétrique réelle et admet deux valeurs propres strictement positives, elle est donc symétrique définie et positive, par suite (x_0, y_0) est un minimum local.

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$ donc $x = u$ et $y = v + 3$, on remplace dans F

$$\begin{aligned} F(x, y) &= u^2 + u(v + 3) + (v + 3)^2 - 3u - 6(v + 3) \\ &= u^2 + uv + 3u + v^2 + 6v + 9 - 3u - 6v - 18 \\ &= u^2 + uv + v^2 - 9 \end{aligned}$$

1.

3.2 On a $F(x_0, y_0) = -9$ donc

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x_0, y_0) &= u^2 + uv + v^2 \\ &= \left(u^2 + 2 \cdot u \frac{v}{2} + \frac{v^2}{4} \right) + \frac{3v^2}{4} \\ &= \left(u + \frac{v}{2} \right)^2 + \frac{3v^2}{4} \end{aligned}$$

par suite $F(x, y) - F(x_0, y_0) \geq 0$ pour tout (x, y) dans \mathbb{R}^2 , cette inégalité est stricte si $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ donc F présente un minimum absolu strict au point (x_0, y_0) .

Problème

Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

Notations

I désigne un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note (\mathcal{L}_f) l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f$$

1^{ère} Partie

Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) Application au cas où f est 2π -périodiques .

1.1 Σ_0 est une partie non vide de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $0 \in \Sigma_0$, stable par combinaison linéaire (*simple à vérifier*), donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Les solutions réelles de cette équation, linéaire homogène de second ordre, sont de la forme

$$y : x \mapsto a \cos x + b \sin x$$

donc Σ_0 est de dimension 2 dont une base est la famille (\cos, \sin) .

1.2 Recherche d'une solution particulière de (\mathcal{L}_f)

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \int_{x_0}^x f(t) \cos t \, dt$ et $\varphi_2(x) = \int_{x_0}^x f(t) \sin t \, dt$.

1.2.1 f est continue sur I donc les fonctions $t \mapsto f(t) \cos t$ et $t \mapsto f(t) \sin t$ sont continues, par suite φ_1 et φ_2 sont de classe \mathcal{C}^1 sur I et $\varphi_1'(x) = f(x) \cos x$ et $\varphi_2'(x) = f(x) \sin x$ pour tout $x \in I$.

1.2.2 Soit $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{f, x_0}(x) &= \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) \, dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t) (\sin(x) \cos(t) - \cos(x) \sin(t)) \, dt \\ &= \sin(x) \int_{x_0}^x f(t) \cos(t) \, dt - \cos(x) \int_{x_0}^x f(t) \sin(t) \, dt \\ &= \varphi_1(x) \sin x - \varphi_2(x) \cos x \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{f, x_0}(x_0) = 0$.

1.2.3 φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ_{f, x_0} l'est aussi et

$$\begin{aligned} \varphi'_{f, x_0}(x) &= \varphi_1'(x) \sin x + \varphi_1(x) \cos x - \varphi_2'(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x \\ &= f(x) \cos x \cdot \sin x + \varphi_1(x) \cos x - f(x) \sin x \cdot \cos x + \varphi_2(x) \sin x \\ &= \varphi_1(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi'_{f, x_0}(x_0) = 0$.

1.2.4 φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ'_{f,x_0} est dérivable sur I par suite φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et

$$\begin{aligned}\varphi''_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x) \cos x - \varphi_1(x) \sin x + \varphi'_2(x) \sin x + \varphi_2(x) \cos x \\ &= f(x) \cos^2 x - \varphi_1(x) \sin x + f(x) \sin^2 x + \varphi_2(x) \cos x \\ &= f(x) + \varphi_1(x) \sin x - \varphi_2(x) \cos x \\ &= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x)\end{aligned}$$

ainsi φ_{f,x_0} est solution, sur I , de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f)

1.2.5 Soit ψ une solution de (\mathcal{L}_f) telle que $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$, posons $Y = \psi - \varphi_{f,x_0}$, alors elle vérifie $Y'' + Y = 0$ et il existe a et b tel que $y(x) = a \cos x + b \sin x$ de plus on a $Y(x_0) = Y'(x_0) = 0$ donc

$$\begin{cases} a \cos x_0 + b \sin x_0 = 0 \\ -a \sin x_0 + b \cos x_0 = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système est égale 1, sa matrice est inversible il admet donc une unique solution et $a = b = 0$ d'où $Y = 0$ et $\psi = \varphi_{f,x_0}$.

Ainsi φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I , du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

1.3. De la même façon, si ψ une solution de (\mathcal{L}_f) sur I , alors $y = \psi - \varphi_{f,x_0}$ vérifie $y'' + y = 0$, donc il existe a et b tel que $y(x) = a \cos x + b \sin x$, d'où

$$\psi(x) = a \cos x + b \sin x + \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) dt$$

ce qui donne le résultat.

1.4. On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que f est 2π -périodique.

1.4.1. Soit g une solution 2π -périodique de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) .

i) D'après 1.3 avec $x_0 = 0$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

ii) Soit x un réel, on a $g(x) = g(x+2\pi)$ donc

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x+2\pi-t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt$$

la relation de Chasles donne $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$.

iii) En particulier

→ Si $x = 0$ alors $\int_0^{2\pi} f(t) \sin(t) dt = 0$.

→ Si $x = \frac{\pi}{2}$ alors

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt = 0.$$

écrivons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(t) \cos(t) dt + \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt + \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt.$$

un changement de variable $t = u + 2\pi$ donne

$$\int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u + 2\pi) \cos(u + 2\pi) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \cos(u) du.$$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt = 0$$

1.4.2. On suppose ici que $\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt = 0$.

i) Soit x un réel, on a

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_x^0 f(t) \sin(x-t) dt + \int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) dt + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$$

le changement de variable $t = u + 2\pi$ donne $\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$, donc

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) dt$$

d'autre part

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \sin(x) \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt}_{=0} - \cos(x) \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t) \sin(t) dt}_{=0} = 0$$

d'où

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ii) On a $\varphi_{f,0}(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$ et

$$\begin{aligned} \varphi_{f,0}(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt \\ &= \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt + \int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt \end{aligned}$$

d'après i) $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$ donc $\varphi_{f,0}(x+2\pi) = \varphi_{f,0}(x)$ et $\varphi_{f,0}$ est 2π -périodique.

Soit g une solution de (\mathcal{L}_f) , il existe λ et μ tels que

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \\ &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \varphi_{f,0}(x) \end{aligned}$$

$\varphi_{f,0}$, \cos et \sin sont 2π -périodiques donc g est 2π -périodique.

1.4.3. Si $f(x) = \sin(x)$, les solutions de (\mathcal{L}_f) sont de la forme

$g : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + \varphi_{f,0}(x)$ avec

$$\begin{aligned} \varphi_{f,0}(x) &= \int_0^x \sin(t) \sin(x-t) dt \\ &= \sin(x) \int_0^x \sin(t) \cos(t) dt - \cos(x) \int_0^x \sin^2(t) dt \end{aligned}$$

on a

$$\int_0^x \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \sin^2(x)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin^2(t) dt &= \int_0^x \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \end{aligned}$$

ainsi

$$\varphi_{f,0}(x) = \frac{1}{2} \sin^3(x) - \cos(x) \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right)$$

$\varphi_{f,0}$ n'est pas 2π -périodique donc l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) n'admet pas de solution 2π -périodique.

2^{ème} Partie

Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

2.1. Convergence d'intégrales

2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

i) La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

→ En 0 : On a $\frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1 - (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\frac{1 - \cos t}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.

→ En $+\infty$: $\left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

D'où la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

ii) Soit $x > 0$. On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt &= \int_1^x \frac{(1 - \cos t)'}{t} dt \\ &= \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

iii) → On a $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$ donc $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et elle est intégrable sur $]0, 1]$ ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

→ D'après i) la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$

converge et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$, ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

D'où l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

2.1.2. Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt &= \int_1^x \frac{(\sin t)'}{t} dt \\ &= \left[\frac{\sin t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt \end{aligned}$$

$\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, donc $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ converge et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ est convergente.

2.2. $I =]0, +\infty[$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

2.2.1. Analyse : On suppose que ψ est une solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle (\mathcal{L}_f) ayant 0 pour limite en $+\infty$.

i) Soit $x \in]0, +\infty[$, d'après 1.3 avec $x_0 = 1$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt \\ &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt - \cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \right) \sin x\end{aligned}$$

ii) ψ tend vers 0 en $+\infty$ donc les deux suites $(\psi(2n\pi))_{n \geq 1}$ et $(\psi(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))_{n \geq 1}$ convergent vers 0 en $+\infty$. On a

$$\psi(2n\pi) = \lambda - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = (-1)^n \left(\mu + \int_1^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \frac{\cos t}{t} dt \right)$$

par passage à la limite en $+\infty$ on obtient

$$\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \mu = - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

iii) On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \cos x + \left(- \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \right) \sin x \\ &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt.\end{aligned}$$

2.2.2. Synthèse : d'après la question précédente on a

$$\psi_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt$$

avec $\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\mu = - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, donc ψ_1 est solution de (\mathcal{L}_f) sur $]0, +\infty[$.

Et aussi

$$\psi_1(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

donc

$$|\psi_1(x)| \leq \left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| + \left| \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right|$$

les deux intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ convergent donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_1(x) = 0$.

Ainsi ψ_1 est solution, sur $]0, +\infty[$, de (\mathcal{L}_f) et elle admet 0 pour limite en $+\infty$.

2.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

2.3.1. Soit $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$

est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ l'est aussi.

On pose $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$, $x \geq 0$.

2.3.2. $h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

2.3.3. La fonction $(x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et elle est dominée par la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre donne la continuité de h sur $[0, +\infty[$.

2.3.4. Pour tout $x > 0$ on a $|h(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$, donc h tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
(on peut le faire avec le théorème de la convergence dominée...)

2.3.5. La fonction $g : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$$

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{b^2 e^{-at}}{1+a^2} = \varphi(t)$, la fonction φ est intégrable. Donc h est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$ par suite h est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et

$$h''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

2.3.6. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} h''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1 - 1)e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{x} - h(x) \end{aligned}$$

d'où $h''(x) + h(x) = \frac{1}{x}$.

2.3.7. h est solution, sur $]0, +\infty[$, de (\mathcal{L}_f) et elle admet 0 pour limite en $+\infty$, d'après 2.2.2 on a

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t} dt \stackrel{t=x+s}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{x+s} ds$$

2.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet.

2.4.1. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right| \\ &\leq x \left| \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt \right| + x \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right| \end{aligned}$$

et $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt \geq 0$ donc

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt + x \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right|$$

2.4.2. Soit $x > 0$, on a :

→ pour tout t dans $]0, 1]$, $0 \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$ donc

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \frac{1}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = \ln(x+1) - \ln x$$

→ pour tout t dans $[1, +\infty[$ $\frac{1}{t(x+t)} \leq \frac{1}{t^2}$ par suite

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t(x+t)} \right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(x+t)} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

d'où

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

2.4.3. De la question précédente on a

$$\left| h(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \quad \forall x > 0$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \right) = 0$ par suite $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. or $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = \frac{\pi}{2}$
donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

3^{ème} Partie

Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto e^{-nx}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, donc $\sup_{x \in [0, +\infty[} |u_n(x)| = \frac{1}{1+n^2}$, la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3.2. Soit $a > 0$, on a $\sup_{x \in [a, +\infty[} |nu_n(x)| = \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$ et $\sup_{x \in [a, +\infty[} |n^2u_n(x)| = \frac{n^2e^{-na}}{1+n^2}$.

Pour tout $\alpha \geq 0$ on a $\frac{n^\alpha e^{-na}}{1+n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \frac{n^\alpha e^{-na}}{1+n^2}$ converge, on en déduit que les séries de fonctions $\sum_{n \geq 1} nu_n$ et $\sum_{n \geq 1} n^2u_n$ convergent normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$

On pose $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $x \geq 0$.

3.3. Quelques propriétés de la fonction u

3.3.1. La série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, +\infty[$ et les fonctions u_n sont continue sur $[0, +\infty[$, le théorème de continuité des série de fonctions assure la continuité de u sur $[0, +\infty[$.

3.3.2. La série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, +\infty[$ et $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, le théorème d'inversion de limite et somme donne :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$$

Autre méthode : si $x > 0$ alors $|u(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$.

3.3.3. Les fonction u_n sont de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et $u_n''(x) = \frac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2}$.

Soit $a > 0$, d'après 3.2 la serie $\sum_{n \geq 1} u_n''$ converge normalement et uniformément sur $[a, +\infty[$, donc u est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, +\infty[$, ceci est valable pour tout $a > 0$, par suite u est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et

$$u''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2}.$$

3.3.4. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} u''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 + 1 - 1)e^{-nx}}{1+n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - u(x) \end{aligned}$$

d'où

$$u''(x) + u(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

3.3.5. u est une solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle \mathcal{L}_f avec $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, d'après 1.3 (avec $x_0 = 1$) il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0, \quad u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{1}{e^t - 1} \sin(x - t) dt$$

3.4. Une autre expression intégrale de la fonction u

3.4.1. Soit $a > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et $\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

3.4.2. Soit $a > 0$, on a $\left| \frac{1}{e^t - 1} \sin t \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$ et $\left| \frac{1}{e^t - 1} \cos t \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ donc les fonctions $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \sin t$ et $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \cos t$ sont intégrables sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

3.4.3. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{1}{e^t - 1} \sin(x - t) dt \\ &= \cos x \left(\alpha - \int_1^x \frac{\sin t}{e^t - 1} dt \right) + \sin x \left(\beta + \int_1^x \frac{\cos t}{e^t - 1} dt \right) \end{aligned}$$

d'après 3.3.2 on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$, par analogie avec la question 2.2.1 les suites $(u(2n\pi))_{n \geq 1}$ et $(u(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))_{n \geq 1}$ convergent vers 0 en $+\infty$ ce qui donne

$$\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt \quad \text{et} \quad \beta = - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{e^t - 1} dt \quad (\text{les deux intégrales convergentes d'après 3.4.2})$$

donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{e^t - 1} dt \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t - x)}{e^t - 1} dt \\ &\stackrel{t=s+x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{e^{x+s} - 1} ds \end{aligned}$$

Ce qui prouve, aussi, que u est l'unique solution, sur $]0, +\infty[$, de (\mathcal{L}_f) qui admet 0 pour limite en $+\infty$.

3.5. Posons $\varphi : t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$

• On a :

$\rightarrow \frac{\sin t}{e^t - 1} = \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{e^t - 1}{t}}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{e^t - 1} = 1$, la fonction φ est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

$\rightarrow \left| \frac{1}{e^t - 1} \sin t \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$ et $\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par suite φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

• Soit $t > 0$, le développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$ conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\sin t}{e^t - 1} &= \frac{e^{-t} \sin t}{1 - e^{-t}} \quad (e^{-t} < 1) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t e^{-nt} \end{aligned}$$

posons $f_n : t \mapsto \sin t e^{-nt}$.

Première méthode : Par le théorème d'interversion de \sum et \int .

▷ les fonctions f_n sont continues et $|f_n(t)| \leq e^{-nt}$ donc les f_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

▷ la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers φ qui est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

▷ de plus, on a :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt$$

et

$$\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt \stackrel{x=nt}{=} \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{n^2}$$

donc la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge .

Le théorème d'interversion de \sum et \int donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right)$$

et on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} \sin t e^{-nt} dt \\ &= \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-n)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(i-n)t}}{i-n} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{n-i} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{n+i}{n^2+1} \right) \end{aligned}$$

ainsi $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{n^2+1}$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Deuxieme methode : Par le théorème de convergence dominée

Posons $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, on a :

▷ les fonctions f_n et φ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

▷ les fonctions S_n sont donc continues et intégrables sur $]0, +\infty[$ et la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement sur $]0, +\infty[$ vers φ .

De plus, on a :

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\sin t| e^{-kx} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\sin t| e^{-kx} = \frac{|\sin t|}{e^x - 1}$$

donc $|S_n(x)| \leq |\varphi(x)|$ avec $|\varphi|$ continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de convergence dominée appliqué à la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} f_k(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \end{aligned}$$

••• FIN •••