# Devoir Maison

## Intégration (CNC 2023)

### Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

### Notations

Dans ce problème, $I$ désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f. \qquad (\mathscr{L}_f)$$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f,x_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles.*

### 1ère Partie
### Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$
### Application au cas où $f$ est $2\pi$-périodique

**1.1.** Montrer que l'ensemble $\Sigma_0$ des solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

**1.2. Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$**

Pour tout $x \in I$, on pose $\quad \varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$

**1.2.1.** Justifier que les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont dérivables sur $I$ et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$.

**1.2.2.** Montrer que, pour tout $x \in I$, $\quad \varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$ ?

**1.2.3.** En déduire que $\varphi_{f,x_0}$ est dérivable sur $I$ et exprimer $\varphi_{f,x_0}'(x)$ pour tout $x \in I$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}'(x_0)$ ?

**1.2.4.** Montrer que $\varphi_{f,x_0}$ est deux fois dérivable sur $I$ et qu'elle est solution, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

**1.2.5.** Montrer que $\varphi_{f,x_0}$ est l'unique solution, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ s'annulant ainsi que sa dérivée en $x_0$.

**1.3. Expression intégrale des solutions de $(\mathscr{L}_f)$**

Montrer que les solutions, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

**1.4. Étude de la périodicité des solutions de $(\mathscr{L}_f)$ dans le cas où $f$ est $2\pi$-périodique**

*Dans cette section, on suppose que $I = \mathbb{R}$ et que $f$ est $2\pi-$périodique.*

**1.4.1.** On suppose que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède une solution $2\pi$-périodique $g$.

**(i)** Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

**(ii)** En déduire que, pour tout réel $x$, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**(iii)** Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**1.4.2.** On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$.

**(i)** Montrer que, pour tout réel $x$, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**(ii)** En déduire, d'abord que $\varphi_{f,0}$ est $2\pi$-périodique, puis justifier qu'il en est de même de toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

**1.4.3.** Si $f$ est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède-t-elle des solutions $2\pi$-périodiques ?

## 2ème Partie
## Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

*Le but de cette partie est de calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, *dite de* DIRICHLET.

**2.1. Convergence d'intégrales**

**2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET**

**(i)** Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

**(ii)** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

**(iii)** Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

**2.1.2.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ est également convergente.

**2.2. Étude de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ lorsque $I = ]0, +\infty[$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$**

*Dans cette section, on suppose que $I = ]0, +\infty[$ et que $f$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. On cherche à montrer, par analyse-synthèse, que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ admet une unique solution, sur $]0, +\infty[$, ayant $0$ pour limite en $+\infty$.*

**2.2.1. Analyse :** On suppose que $\psi$ est une solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant $0$ pour limite en $+\infty$.

**(i)** Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, x > 0, \quad \psi(x) = \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x.$$

**(ii)** Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et que $\mu = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$. *On pourra considérer les suites numériques $\big(\psi(2n\pi)\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(\psi(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\big)_{n\geqslant 1}$.*

**(iii)** En déduire que, pour tout $x > 0$, $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$.

**2.2.2. Synthèse :** Montrer que la fonction $\psi_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$ est effectivement solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ et qu'elle admet $0$ pour limite en $+\infty$.

# Corrigé

## Problème

**Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse**

**Notations**

$I$ désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f$$

### 1ère Partie

**Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ Application au cas où $f$ est $2\pi$-périodiques .**

**1.1** $\Sigma_0$ est une partie non vide de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ , $0 \in \Sigma_0$ , stable par combinaison linéaire (*simple à vérifier* ) , donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ .

Les solutions réelles de cette équation , linéaire homogène de second ordre, sont de la forme

$$y : x \mapsto a\cos x + b\sin x$$

donc $\Sigma_0$ est de dimension 2 dont une base est la famille $(\cos, \sin)$ .

**1.2 Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$**

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t \ \mathrm{d}t$ et $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t \ \mathrm{d}t$.

**1.2.1** $f$ est continue sur $I$ donc les fonctions $t \mapsto f(t)\cos t$ et $t \mapsto f(t)\sin t$ sont continues , par suite $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et $\varphi_1'(x) = f(t)\cos t$ et $\varphi_2'(x) = f(t)\sin t$ pour tout $x \in I$ .

**1.2.2** Soit $x \in I$,on a

$$\begin{aligned}
\varphi_{f,x_0}(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} f(t)(\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)\mathrm{d}t \\
&= \sin(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\sin(t)dt \\
&= \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{f,x_0}(x_0) = 0$.

**1.2.3** $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont dérivables sur $I$ donc $\varphi_{f,x_0}$ l'est aussi et

$$\begin{aligned}
\varphi'_{f,x_0}(x) &= \varphi_1'(x)\sin x + \varphi_1(x)\cos x - \varphi_2'(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \\
&= f(x)\cos x.\sin x \ + \varphi_1(x)\cos x - \ f(t)\cos .x\sin x + \varphi_2(x)\sin x \\
&= \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi'_{f,x_0}(x_0) = 0$.

**1.2.4** $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont dérivables sur $I$ donc $\varphi'_{f,x_0}$ est dérivable sur $I$ par suite $\varphi_{f,x_0}$ est deux fois dérivable sur $I$ et

$$\begin{aligned}\varphi''_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x)\cos x - \varphi_1(x)\sin x + \varphi'_2(x)\sin x + \varphi_2(x)\cos x \\ &= f(x)\cos^2 x \; - \varphi_1(x)\sin x + \; f(t)\sin^2 x + \varphi_2(x)\cos x \\ &= f(x) + \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x \\ &= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x)\end{aligned}$$

ainsi $\varphi_{f,x_0}$ est solution, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$

**1.2.5** Soit $\psi$ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ telle que $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$ , posons $Y = \psi - \varphi_{f,x_0}$, alors elle vérifie $Y'' + Y = 0$ et il existe $a$ et $b$ tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$ de plus on a $Y(x_0) = Y'(x_0) = 0$ donc

$$\begin{cases} a\cos x_0 + b\sin x_0 = 0 \\ -a\sin x_0 + b\cos x_0 = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système est égale 1 , sa matrice est inversible il admet donc une unique solution et $a = b = 0$ d'où $Y = 0$ et $\psi = \varphi_{f,x_0}$ .

Ainsi $\varphi_{f,x_0}$ est l'unique solution, sur $I$, du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

**1.3.** De la même façon , si $\psi$ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ sur $I$, alors $y = \psi - \varphi_{f,x_0}$ vérifie $y'' + y = 0$ , donc il existe $a$ et $b$ tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$ , d'où

$$\psi(x) = a\cos x + b\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne le résultat.

**1.4.** On suppose que $I = R$ et que $f$ est $2\pi$-périodique.

**1.4.1.** Soit $g$ une solution $2\pi$-périodique de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ .

**i )** D'après 1.3 avec $x_0 = 0$ , il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

**ii )** Soit $x$ un réel , on a $g(x) = g(x+2\pi)$ donc

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x+2\pi-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

la relation de Chasles donne $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0.$

**iii )** En particulier

→ Si $x = 0$ alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0.$

→ Si $x = \dfrac{\pi}{2}$ alors

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\sin(\frac{\pi}{2}-t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0.$$

écrivons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

un changement de variable $t = u + 2\pi$ donne

$$\int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u+2\pi)\cos(u+2\pi)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\cos(u)\mathrm{d}u.$$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$

**1.4.2.** On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t = 0.$

**i )** Soit $x$ un réel , on a

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$$

le changement de variable $t = u + 2\pi$ donne $\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$, donc

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

d'autre part

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \sin(x)\underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt}_{=0} - \cos(x)\underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt}_{=0} = 0$$

d'où

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

**ii )** On a $\varphi_{f,0}(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned}\varphi_{f,0}(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'après i) $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$ donc $\varphi_{f,0}(x+2\pi) = \varphi_{f,0}(x)$ et $\varphi_{f,0}$ est $2\pi$-périodique.
Soit $g$ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ , il existe $\lambda$ et $\mu$ tels que

$$\begin{aligned}g(x) &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \varphi_{f,0}(x)\end{aligned}$$

$\varphi_{f,0}$ , cos et sin sont $2\pi$-périodiques donc $g$ est $2\pi$-périodique .

**1.4.3.** Si $f\ (x) = \sin(x)$ , les solutions de $(\mathscr{L}_f)$ sont de la forme
$g : x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \varphi_{f,0}(x)$ avec

$$\begin{aligned}\varphi_{f,0}(x) &= \int_0^x \sin(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \sin(x)\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin^2(t)dt\end{aligned}$$

on a

$$\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin^2(t)dt &= \int_0^x \frac{1-\cos(2x)}{2}dt\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\end{aligned}$$

ainsi

$$\varphi_{f,0}(x) = \frac{1}{2}\sin^3(x) - \cos(x)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x)$$

$\varphi_{f,0}$ n'est pas $2\pi-$périodique donc l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ n'admet pas de solution $2\pi$-périodique.

## $2^{\text{ème}}$ Partie

**Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet**

### 2.1. Convergence d'intégrales

#### 2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

**i )** La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\rightarrow$ En 0 : On a $\dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1-(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2} = \dfrac{1}{2}+o(1)$ donc $\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\to} \frac{1}{2}$ .

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$.

$\rightarrow$ En $+\infty$ :$\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ , la fonction $\longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ .

D'où la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ .

**ii )** Soit $x > 0$ . On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{(1-\cos t)'}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

**iii )** $\rightarrow$ On a $\dfrac{\sin t}{t} \underset{t\to 0^+}{\to} 1$ donc $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 etelle est intégrable sur $]0,1]$ ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge .

$\rightarrow$ D'après i) la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ , ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

**2.1.2.** Soit $x > 0$ . On a

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{(\sin t)'}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ , donc $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , ains l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

### 2.2. $I = ]0,+\infty[$ et $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

**2.2.1. Analyse :** On suppose que $\psi$ est une solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.

**i )** Soit $x \in ]0,+\infty[$ , d'après 1.3 avec $x_0 = 1$ , il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \sin x\int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t - \cos x\int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x\end{aligned}$$

**ii )** $\psi$ tend vers 0 en $+\infty$ donc les deux suites $(\psi(2n\pi))_{n\geqslant 1}$ *et* $\left(\psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)_{n\geqslant 1}$ convergent vers 0 en $+\infty$ . On a

$$\psi(2n\pi) = \lambda - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = (-1)^n\left(\mu + \int_1^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)$$

par passage à la limite en $+\infty$ on obtient

$$\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mu = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t.$$

**iii )** On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(-\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t. + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x \\ &= \cos x\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

**2.2.2. Synthèse :** d'après la question précèdente on a

$$\psi_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t$$

avec $\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\mu = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$, donc $\psi_1$ est solution de $(\mathscr{L}_f)$ sur $]0,+\infty[$ .
Et aussi

$$\psi_1(x) = \cos x\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$$

donc

$$|\psi_1(x)| \leq \left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right|$$

les deux intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$ convergent donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi_1(x) = 0$ .
Ainsi $\psi_1$ est solution, sur $]0,+\infty[$, de $(\mathscr{L}_f)$ et elle admet 0 pour limite en $+\infty$.