Devoir Maison

Matrices & Applications Linéaires

Exercice 1 (e3a 2021)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ.**

   2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   2.2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$

   3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.

   3.2. Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.

   3.3. Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$.

   3.4. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

   4.1. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

   4.2. Pour $k \in [|0, n|]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   Démontrer que la famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

   4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Exercice 2 (e3a 2017)

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}-$ algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P′ son polynôme dérivé.

Étant donné un entier naturel n, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.

Partie I.

Soit φ l'application :

$$\varphi\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P} - \mathrm{P}' \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que :
   (a) $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$,
   (b) $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :
$$(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{Id}$$
7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Corrigé

Exercice 1 (e3a 2021)

1. On a $\deg(1)=0,\ \deg(X-1)=1,\dots,\deg(X^k(X-1))=k+1,\deg(X^{n-1}(X-1))=n$.
   La famille $\mathcal{B}=(1,X-1,X(X-1),\dots,X^{n-1}(X-1))$ est constituée de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette famille de polynômes est échelonnée en degré donc est libre.
   $\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Donc $\boxed{\mathcal{B}=(1,X-1,X(X-1),\dots,X^{n-1}(X-1)) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$
2. **Généralités sur φ.**
   2.1. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $\varphi(P)\in\mathbb{R}$.
   Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ et $(P_1,P_2)\in\mathbb{R}_n[X]^2$. Par linéarité de l'intégrale :
   $$\varphi(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=\int_0^1(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(t)dt=\lambda_1\int_0^1P_1(t)dt+\lambda_2\int_0^1P_2(t)dt=\lambda_1\varphi(P_1)+\lambda_2\varphi(P_2).$$
   Donc φ est linéaire. Ainsi $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$ et $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$
   2.2. $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est de dimension 1, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 0 ou 1. On a $\varphi(1)=\displaystyle\int_0^1 1dt=1\neq 0$ donc φ est non nulle, $\mathrm{rg}(\varphi)\neq 0$ donc $\mathrm{rg}(\varphi)=1$. $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 1 donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}.}$
   Par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=\dim(\mathbb{R}_n[X])-\mathrm{rg}(\varphi)=(n+1)-1=n$. $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=n}$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. 3.1. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ et $(P_1,P_2)\in\mathbb{R}_n[X]^2$. Par linéarité de l'intégrale :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\psi(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(x)=\int_0^x(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(t)dt=\lambda_1\int_0^xP_1(t)dt+\lambda_2\int_0^xP_2(t)dt=\lambda_1\varphi(P_1)(x)+\lambda_2\varphi(P_2)(x).$$
   Donc $\psi(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=\lambda_1\varphi(P_1)+\lambda_2\varphi(P_2)$. Ainsi $\boxed{\psi \text{ est linéaire.}}$
   3.2. Soit $k\in[|0,n|]$. On a :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad \psi(X^k)(x)=\int_0^x t^kdt=\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x=\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$
   On en déduit que $\psi(X^k)=\dfrac{1}{k+1}X^{k+1}$. Puisque $(1,X,\dots,X^k,\dots X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :
   $$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\psi)=\mathrm{Vect}(\psi(1),\psi(X),\dots,\psi(X^k),\dots,\psi(X^n)) &= \mathrm{Vect}\left(X,\frac{1}{2}X^2,\dots,\frac{1}{k+1}X^{k+1},\dots,\frac{1}{n+1}X^{n+1}\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(X,X^2,\dots,X^{k+1},\dots,X^{n+1}\right).\end{aligned}$$
   D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\psi)=\mathrm{Vect}\left(X,X^2,\dots,X^{k+1},\dots,X^{n+1}\right).}$
   3.3. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$.
   $$\begin{aligned}P\in\mathrm{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(P)=0\\ &\Leftrightarrow \int_0^1P(t)dt=0\\ &\Leftrightarrow \Psi(P)(1)=0\\ &\Leftrightarrow 1 \text{ est racine du polynôme } \psi(P)\\ &\Leftrightarrow (X-1) \text{ divise le polynôme } \psi(P).\end{aligned}$$
   Montrons l'équivalence demandée.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Si $\psi(P)\in\mathrm{Vect}\Big(X(X-1),\dots,X^n(X-1)\Big)$, alors $(X-1)$ divise $\psi(P)$ donc $P\in\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   $\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, si $P\in\mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $(X-1)$ divise $\psi(P)$. De plus, $\psi(P)(0)=0$ donc X divise $\psi(P)$. On en déduit que $X(X-1)$ divise $\psi(P)$ avec $\psi(P)\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$, donc $\psi(P)\in X(X-1)\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Ainsi $\psi(P)\in\mathrm{Vect}\Big(X(X-1),\dots,X^n(X-1)\Big)$.
   Finalement, on a montré que : $\boxed{P\in\mathrm{Ker}(\varphi)\quad\Leftrightarrow\quad\psi(P)\in\mathrm{Vect}\Big(X(X-1),\dots,X^n(X-1)\Big).}$

3.4. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $R_k(X) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$.
On remarque que $\deg(R_k) = k$ donc la famille $(R_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degré donc libre. De plus

$$\psi(R_k) = (k+1)\psi(X^k) - k\psi(X^{k-1}) = (k+1)\frac{X^{k+1}}{k+1} - k\frac{X^k}{k} = X^{k+1} - X^k = X^k(X-1).$$

Donc $\psi(R_k) \in \text{Vect}\Big(X(X-1), \dots, X^n(X-1)\Big)$. D'après la question **3.3.**, $R_k \in \text{Ker}(\varphi)$.
D'après la question **2.2.**, $\text{Ker}(\varphi)$ est de dimension n.
$(R_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre de cardinal n dans $\text{Ker}(\varphi)$ qui est de dimension n, donc une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
$\boxed{(R_k)_{1\leq k\leq n} = \Big((k+1)X^k - kX^{k-1}\Big)_{1\leq k\leq n} \text{ est une base de } \text{Ker}(\varphi).}$

4. 4.1. On a $\dim\mathcal{H} = \dim\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = (n+1)\times 1$. Donc $\boxed{\dim(\mathcal{H}) = n+1.}$

4.2. Pour $(k,\ell) \in [|0,n|]^2$, calculons $\psi_k(X^\ell)$. On pose $P(X) = X^\ell$.

$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{Si } k \leq \ell-1: & P^{(k)}(X) & = & \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)X^{\ell-k}. & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0. \\ \text{Si } k = \ell: & P^{(\ell)}(X) & = & \ell!\ . & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(\ell)}(0)}{\ell!} = 1. \\ \text{Si } k \geq \ell+1: & P^{(k)}(X) & = & 0. & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0. \end{array}\right.$$

Ainsi $\boxed{\psi_k(X^\ell) = \delta_{k,\ell} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{array}\right. .}$

Montrons que la famille $(\psi_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre. Soit $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k = 0$. Soit $\ell \in [|0,n|]$.

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k\right)(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\delta_{k,\ell} = \lambda_\ell.$$

On a $\forall \ell \in [|0,n|]$, $\lambda_\ell = 0$ donc la famille est libre.
La famille $(\psi_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathcal{H}$ qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathcal{H}$. $\boxed{(\psi_0, \dots, \psi_n) \text{ est une base de } \mathcal{H}.}$

4.3. φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\varphi \in \mathcal{H}$.
Soient $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ les coordonnées de φ dans la base $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ de $\mathcal{H}$: $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k$. Soit $\ell \in [|0,n|]$.

$$\varphi(X^\ell) = \int_0^1 t^\ell dt = \frac{1}{\ell+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k\right)(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\delta_{k,\ell} = \lambda_\ell.$$

Donc $\forall \ell \in [|0,n|]$, $\lambda_\ell = \dfrac{1}{\ell+1}$. Ainsi $\boxed{\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\psi_k.}$

Exercice 1 (e3a 2017)

1. **Endormorphisme**
   - Il est clair que $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   - φ linéaire : on voit facilement que $\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \varphi(\mathrm{Q})$.

   Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   Satabilité Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Montrons $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

   On a $\deg \mathrm{P} \leqslant n$ donc $\deg(\mathrm{P}') \leqslant n$

   Ainsi $\deg(\mathrm{P} - \mathrm{P}') = \deg(\varphi(\mathrm{P})) \leqslant n$ d'où le résultat

   Ainsi $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ stable par φ.

   On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ induit sur } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ un endomorphisme}}$

2. $\boxed{\text{La matrice de } \varphi_n \text{ sur la base canonique de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ est : } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})}$

3. Le polynôme caractéristique de φ est $\chi_\varphi = (\mathrm{X} - 1)^{n+1}$ (matrice triangulaire)

   donc le spectre de φ_n est $\{1\}$.

   On trouve facilement que $\mathrm{rg}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] - \varphi_n}) = \mathrm{rg}(\mathrm{I}_{n+1} - \mathcal{M}(\varphi_n)) = n$.

   donc selon le théorème du rang : $\dim(\mathrm{E}_1(\varphi_n)) = 1$ or $\varphi_n(1) = 1$

   de plus $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_n)} \dim\left(\mathrm{E}_\lambda(\varphi_n)\right) = 1$ et $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n + 1 > 1$

   ainsi $\boxed{\begin{array}{l}\text{la seule valeur propre de } \varphi_n \text{ est et le sous-espace propre est } \mathrm{E}_1(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(1) \\ \text{ainsi l'endomorphisme } \varphi_n \text{ n'est pas diagonalisable}\end{array}}$

4. À l'aide de la matrice de φ_n, on trouve que $\det(\varphi_n) = 1 \neq 0$

   ainsi $\boxed{\varphi_n \text{ est un automorphisme de l'espace de dimension finie } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$

5. Comme φ est un automorphisme, on a pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$,

   $$\varphi_n(x) = \frac{\mathrm{X}^i}{i!} \text{ si et seulement si } x = \varphi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)$$

   ceci nous donne l'existence et l'unicité de $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{\mathrm{X}^i}{i!}$

   De plus $\left(\frac{\mathrm{X}^0}{0!}, \frac{\mathrm{X}^1}{1!}, \ldots, \frac{\mathrm{X}^n}{n!}\right)$ est une famille échelonnée donc libre constituée de $n + 1$ vecteurs

   comme $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n + 1$, alors $\left(\frac{\mathrm{X}^0}{0!}, \frac{\mathrm{X}^1}{1!}, \ldots, \frac{\mathrm{X}^n}{n!}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$

   l'image d'une base par l'automorphisme φ_n^{-1} étant une base, on en déduit que

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe une unique famille de polynômes } s_0, s_1, \ldots, s_n \text{ telle que :} \\ \quad \text{(a) } \forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{\mathrm{X}^i}{i!}, \\ \quad \text{(b) } (s_0, s_1, \ldots, s_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].\end{array}}$$

6. On a $(\mathrm{Id}-\delta)\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)-(\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n+1})=\mathrm{Id}-\delta^{n+1}$
Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Par récurrence immédiate, on a : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\deg\left(\delta^k(\mathrm{P})\right)\leqslant -k+\deg\mathrm{P}$
donc $\deg\left(\delta^{n+1}(\mathrm{P})\right)\leqslant -1$ et ainsi $\left(\delta^{n+1}(\mathrm{P})\right)=0$
on a donc bien $\boxed{(\mathrm{Id}-\delta)\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=\mathrm{Id}}$

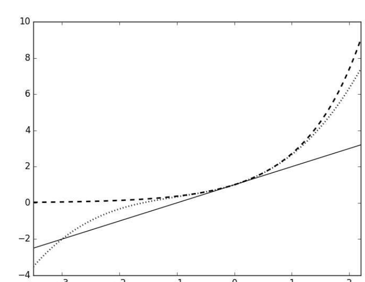
7. On déduit de la question précédente que $\varphi_n\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=\mathrm{Id}$
Comme φ_n est endomorphisme d'un espace de dimension finie alors $\varphi_n^{-1}=\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n$
donc pour i dans $[\![0,n]\!]$, on a $s_i=\varphi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^i)\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)$
On en déduit $\boxed{s_i=1+\dfrac{\mathrm{X}}{1!}+\cdots\dfrac{\mathrm{X}^i}{i!}=\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\frac{\mathrm{X}^j}{j!}}$

Partie II.

On obtient les limites des fonctions polynomiales en $\pm\infty$ à l'aide des termes de plus haut degré.

8. On a $\mathrm{S}_3'=\mathrm{S}_2=1+\mathrm{X}+\dfrac{\mathrm{X}^2}{2}$ dont le discriminant vaut -1.
Soit $x\in\mathbb{R}$.
Par inégalité de convexité : $\mathrm{S}_1(x)=1+x\leqslant \mathrm{e}^x$ et par habitude : $\mathrm{S}_1(x)=\mathrm{e}^x\iff x=0$
On a $\mathrm{S}_3(x)-\mathrm{S}_1(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}=\dfrac{x^2}{6}(3+x)$
donc $\boxed{(\mathrm{S}_3(x)=\mathrm{S}_1(x)\iff x=0 \text{ ou } x=-3) \text{ et } (\mathrm{S}_3(x)<\mathrm{S}_1(x)\iff x<-3)}$
Étudions $\varphi=\exp-\mathrm{S}_3$, on a $\varphi'=\exp-\mathrm{S}_2$ et $\varphi''=\exp-\mathrm{S}_1$ qui est positive avec un seul point d'annulation
donc φ' est strictement croissante et $\varphi'(0)=0$ donc φ' est du signe (strict) de x
donc φ est strictement décroissante (respectivement croissante) sur $]-\infty,0]$ (respectivement sur $[0,+\infty[$)
donc $\boxed{\exp(x)\geqslant \mathrm{S}_3(x) \text{ et } \exp(x)\geqslant \mathrm{S}_1(x) \text{ avec égalités si et seulement si } x=0}$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$\mathrm{S}_3'(x)$	$+$
S_3	$-\infty \nearrow +\infty$



9. On va montrer par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$:
« S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. »

Initialisation : Pour $n\in\{0,1\}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée facilement.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, on ait $\mathcal{P}_p$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$.

Si $n+1$ est impair, alors n est pair
Dans ce cas S_n ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ par hypothèse et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{S}_n(x)=+\infty$
par le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{S}_{n+1}'(x)=\mathrm{S}_n(x)>0$ car S_n est continue sur $\mathbb{R}$
donc S_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{S}_{n+1}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{S}_{n+1}(x)=-\infty$
La fonction S_{n+1} étant continue, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle admet alors une unique racine.
Comme S_{n+1}' n'admet pas de racine réelle, la seule racine de S_{n+1} est simple.