Devoir Maison : Algèbre Linéaire

Concours National Commun

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2

Session 2024 - Filière MP

Problème.

Dans tout le problème $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}, GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0=\mathrm{id}_E$ et pour tout entier naturel k, $f^{k+1}=f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel $k, \mathcal{N}_k=\operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ et $\mathcal{I}_k=\operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite $\left(\mathcal{N}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $\left(\mathcal{I}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. En déduire que $\left(\operatorname{dim} \mathcal{N}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q=\mathcal{N}_{q+1}$.

4. Montrer que $\mathcal{I}_q=\mathcal{I}_{q+1}$.

5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q=E$,

6. On considère pour tout entier naturel k, φ_k la restriction de f a $\mathcal{I}_k$.

a) Montrer que $\operatorname{dim} \mathcal{I}_k-\operatorname{dim} \mathcal{I}_{k+1}=\operatorname{dim}\left(\operatorname{Ker}(f\ ) \cap \mathcal{I}_k\right)$.

b) En déduire que la suite $\left(\operatorname{dim} \mathcal{N}_{k+1}-\operatorname{dim} \mathcal{N}_k\ \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U.

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\operatorname{Im}\left(u^r\right)$.

a) Vérifier que $\operatorname{Im}(v)=\operatorname{Im}\left(u^{s+r}\right)$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}\left(u^s\right)$.

c) Montrer que $\operatorname{dim}\left(\operatorname{Ker}\left(u^{r+s}\right)\right) \leq \operatorname{dim}\left(\operatorname{Ker}\left(u^r\right)\right)+\operatorname{dim}\left(\operatorname{Ker}\left(u^s\right)\right)$.

d) En déduire que pour tout entier naturel $i, \operatorname{dim}\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n=0$.

a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n, \operatorname{dim}\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right)=i$.

b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n.

c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e=\left(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e)\right)$ soit une base de E.

d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.

3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ sont semblables.

Corrigé

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel $k, \mathcal{N}_k = \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ et $\mathcal{I}_k = \operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

1. Le noyau etl'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.

• Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{N}_k$. On a $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) = f(0) = 0$ donc $x \in \mathcal{N}_{k+1}$. D'où $\boxed{\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}}$.

• Soit $y \in \mathcal{I}_{k+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Pour $a = f(x) \in E$ on a alors $f^k(a) = f^{k+1}(x) = y$ et donc $y \in \mathcal{I}_k$. Ainsi $\boxed{\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$ implique $\dim \mathcal{N}_k \leq \dim \mathcal{N}_{k+1}$ donc la suite $(\dim \mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

• Comme $(\dim \mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels croissante et majorée par n, celle-ci est nécessairement constante à partir d'un certain rang $k_0 \leq n$.

• Soit $A = \{k \in [\![0; n]\!] \mid \dim \mathcal{N}_k = \dim \mathcal{N}_{k+1}\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc elle possède un plus petit élément q.

On a $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{q+1}$ et $q \in A$ donc $\dim \mathcal{N}_q = \dim \mathcal{N}_{q+1}$ par suite $\boxed{\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}}$.

3. On a $\mathcal{I}_{q+1} \subset \mathcal{I}_q$ et $\dim \mathcal{I}_a = n - \dim \mathcal{N}_q = n - \dim \mathcal{N}_{q+1} = \dim \mathcal{I}_{q+1}$ donc $\boxed{\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}}$.

4. Soit $x \in \mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q$. Il existe $a \in E$ tel que $x = f^q(a)$ et $f^q(x) = 0$ donc $f^{q+1}(a) = 0$ d'où $a \in \mathcal{N}_{q+1} = \mathcal{N}_q$ par suite $x = f^q(a) = 0$. Ainsi $\mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q = \{0\}$. De plus, par le théorème du rang : $\dim \mathcal{N}_q + \dim \mathcal{I}_q = \dim E$ donc $\boxed{\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E}$.

5. Pour tout entier naturel k, $\mathcal{I}_k$ est un sous espace stable de E soit $\varphi_k = f_{|\mathcal{I}_k} \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_k)$.

a) Le théorème du rang donne $\dim \mathcal{I}_k = \dim \operatorname{Ker}(\varphi_k) + \dim \operatorname{Im}(\varphi_k)$.

On a :

• $\operatorname{Im}(\varphi_k) = \varphi_k(\mathcal{I}_k) = f(\mathcal{I}_k) = \mathcal{I}_{k+1}$.

• $\operatorname{Ker}(\varphi_k) = \{x \in \mathcal{I}_k \mid \varphi_k(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{I}_k \mid f(x) = 0\}$ donc $\operatorname{Ker}(\varphi_k) = \mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f)$.

Ainsi $\dim \mathcal{I}_k = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f)) + \dim \mathcal{I}_{k+1}$ qui s'écrit $\boxed{\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))}$

b) Par le théorème du rang on a

$$(n - \dim \mathcal{N}_k) - (n - \dim \mathcal{N}_{k+1}) = \dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))$$

On sait que $\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k$ donc $\dim(\mathcal{I}_{k+1} \cap \operatorname{Ker}(f)) \leq \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))$, par suite on a

$$\dim \mathcal{N}_{k+2} - \dim \mathcal{N}_{k+1} \leq \dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k$$

Donc la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U.

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}\,(u^r)$.

a) On a $\text{Im}(v) = v(\text{Im}\,(u^r)) = u^s(\text{Im}\,(u^r)) = \text{Im}\,(u^{s+r})$.

b) On a $\text{Ker}(v) = \text{Im}\,(u^r) \cap \text{Ker}\,(u^s) \subset \text{Ker}\,(u^s)$.

c) De la question a) on a $\dim(\text{Im}(v)) = \dim \text{Im}(u^{s+r})$, le théorème du rang donne :

$$\dim \text{Im}(u^{s+r}) + \dim \text{Ker}(u^{s+r}) = n \text{ et } \dim \text{Im}(v) + \dim \text{Ker}(v) = \dim \text{Im}(u^r)$$

donc

$$n - \dim \text{Ker}(u^{s+r}) = \dim \text{Im}(u^r) - \dim \text{Ker}(v)$$

comme $\dim \text{Im}(u^r) = n-$ $\dim\,(\text{Ker}\,(u^r))$ alors

$$\dim \text{Ker}(u^{s+r}) = \dim\,(\text{Ker}\,(u^r)) + \dim \text{Ker}(v)$$

$\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}\,(u^s)$ donc $\dim \text{Ker}(v) \leq \dim \text{Ker}\,(u^s)$ ainsi $\boxed{\dim\,(\text{Ker}\,(u^{r+s})) \leq \dim\,(\text{Ker}\,(u^r)) + \dim\,(\text{Ker}\,(u^s))}$.

d) On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

• Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$.

• Hérédité : soit $i \in [\![0; n-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i.

La question précédente indique que

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u))$$

Comme u est de rang $n-1$ alors $\text{Ker}(u)$ est de dimension 1et l'hypothèse de récurrence donne

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq i+1$$

ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

Si $i \geq n+1$ le résultat est évident . Ainsi pour tout i dans $\mathbb{N}$, $\boxed{\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i}$.

2. a) On a $U^n = 0$, donc $u^n = 0$ et $u^i = 0$ $\forall i \geq n$ par suite $\dim(\text{Ker}(u^i)) = n \quad \forall i \geq n$.

On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

• Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$.

• Hérédité : soit $i \in [\![0; n-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i.

D'après la partie 1 la suite $(\dim(\text{Ker}(u^i)))_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante , donc

$$i = \dim(\text{Ker}(u^i)) \leq \dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq i+1$$

Si $\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) < i+1$ alors forcement

$$\dim(\text{Ker}(u^i)) = \dim(\text{Ker}(u^{i+1}))$$

par suite $\text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^{i+1})$.

Remarquons que si $x \in \text{Ker}(u^{i+2})$ alors $u(x) \in \text{Ker}(u^{i+1}) = \text{Ker}(u^i)$ et $u^{i+1}(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(u^{i+1})$, ainsi $\text{Ker}(u^{i+2}) \subset \text{Ker}(u^{i+1})$ d'où $\text{Ker}(u^{i+2}) = \text{Ker}(u^{i+1})$.

Par récurrence on a donc $\text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^{i+1}) = ... = \text{Ker}(u^n) = E$ ce qui est absurde .

Donc $\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) = i+1$. D'où le résultat pour $i+1$.

Ainsi on a $\forall i \in [\![0; n]\!]$, $\boxed{\dim(\text{Ker}(u^i)) = i}$.

b) Soit i dans $[\![0; n-1]\!]$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = i$, donc $u^i \neq 0$.
Ainsi on a $u^n = 0$ et pour tout $i \leq n-1$ $u^i \neq 0$ donc l'indice de nilpotence de u est égal à n.

c) On a $u^{n-1} \neq 0$, il existe donc $e \in E \setminus \{0\}$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$.
Montrons que $(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose que

$$\alpha_0 e + \alpha_1 u(e) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(e) = 0$$

En composant par u^{n-1}, on a alors

$$\alpha_0 u^{n-1}(e) + \alpha_1 u^n(e) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{2n-2}(e) = 0$$

Puisque $u^k = 0$ pour tout $k \geq n$ alors $\alpha_0 u^{n-1}(e) = 0$ ainsi $\alpha_0 = 0$.
A chaque fois on compose par $u^{n-2}, u^{n-3}, ..., u$, on obtient par un processus récurrent $\alpha_1 = \alpha_{21} = ... = \alpha_{n-1} = 0$.
La famille $\mathcal{B}_e$ est donc libre et possède $n = \dim(E)$ éléments donc c'est une base de E.

d) La matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$ est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$, posons f_A et f_B les endomorphismes de E canoniquement associé à A et B , il existe donc deux bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_{e'}$ de E dans lesquelles les matrices de f_A et def_B sont identiques à la matrice de la question d) , ce qui prouve que A et B sont semblables .