Prof. MAMOUNI
myismail.net

PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

Prépas MP

Devoir Maison
Polynômes

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

SESSION 2018

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts.

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X).$$

Q7. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

II.3 - Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.

On note $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i).$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a,b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a,b[, \quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x).$$

Q10. Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q11. Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a,b]$ une application F par :

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda\pi_\sigma(t).$$

Q12. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q13. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathcal{P}_x$ est vraie.

Q14. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que :

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.$$

Q15. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$.

Q16. On définit f sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \geqslant (2k)!.$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

On en déduit que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ L_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{i,k} = f(x_k)$$

$L_n(f)$ interpole donc f aux points $x_0, \dots, x_n$.
Si P est un autre polynôme interpolateur alors $P - L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule aux points $x_0, \dots, x_n$. C'est un polynôme de degré $\leq n$ ayant au moins $n+1$ racines et c'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{L_n(f) \text{ est l'unique polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_0, \dots, x_n}$$

2.2 Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q.8. Une première fonction `l(i,x,a)` permet le calcul de $l_i(a)$ associé aux x_k.

```
def l(i,x,a):
    r=1
    for k in range(len(x)):
        if k!=i:
            r=r*(a-x[k])/(x[i]-x[k])
    return r
```

Il reste à calculer la somme définissant L_n associé aux y_i.

```
def lagrange(x,y,a):
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+l(i,x,a)*y[i]
    return s
```

Q.9. La matrice cherchée est une matrice de Vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs noter que d'après le cours cette matrice est inversible quand les x_i sont deux à deux distincts ce qui permet de prouver à nouveau l'existence et l'unicité d'un polynôme interpolateur.
Dans la résolution par méthode de Gauss,
- on cherche un pivot sur la colonne 1 que l'on ramène en position 1 (n opérations) et on fait appraître des zéros par $n-1$ combinaisons de lignes ($O(n^2)$ opérations)
- on procède de même avec les colonnes $2, \dots, n+1$ pour à chaque fois $O(n^2)$ opérations
- on en déduit $x_{n+1}, \dots, x_0$ en $O(1 + 2 + \cdots + (n+1)) = O(n^2)$ opérations.

$$\boxed{\text{La complexité du calcul est } O(n^3)}$$

2.3 Expression de l'erreur d'interpolation

Q.10. Montrons par récurrence (finie) que la propriété : "$\phi^{(k)}$ s'annule $p+1-k$ fois" est vraie pour $k = 0, \dots, p$.
- Le résultat est vrai au rang 0 par hypothèse sur ϕ.
- Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai au rang k. On note $y_1 < \cdots < y_{p+1-k}$ des points d'annulation de $\phi^{(k)}$. Par théorème de Rolle appliqué à $\phi^{(k)}$, $\phi^{(k+1)}$ s'annule sur $]y_i, y_{i+1}[$ pour $i = 1, \dots, p-k$. $\phi^{(k+1)}$ admet donc au moins $p-k$ annulations et lerésultat est vrai au rang $k+1$.

On en déduit en particulier (propriété au rang p) que $\phi^{(p)}$ s'annule. Ce zéro est strictement entre le minimum et le maximum des éléments de σ et donc dans $]a,b[$.

$$\boxed{\text{si } \phi \ : \ [a,b] \to \mathbb{R} \text{ s'annule } p+1 \text{ fois, il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } \phi^{(p)}(c) = 0.}$$

Q.11. $f - L_n(f)$ ainsi que π_σ s'annulent en tout point de σ. Pour $x \in \sigma$, $\mathcal{P}_x$ est donc vraie (on peut choisir pour c_x n'importe quel élément de $]a,b[$).

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \sigma, \text{ la propriété } \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.12. Comme $x \notin \sigma$, $\pi_\sigma(x) \neq 0$ et on peut donc poser

$$\boxed{\lambda = \frac{f(x) - L_n(f)(x) - F(x)}{\pi_\sigma(x)}}$$

et on a alors $F(x) = 0$.

Q.13. F s'annule (comme $f - L_n(f)$ et π_σ) en tout point de σ et en $x \notin \sigma$. On a donc $n+1$ points d'annulation au moins.

$$\boxed{F \text{ s'annule } n+2 \text{ fois}}$$

On en déduit avec Q.10 que $F^{(n+1)}$ s'annule en un point $c_x \in]a,b[$. Comme $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$, sa dérivée $n+1$-ième est nulle. Comme π_σ est unitaire de degré $n+1$, sa dérivée $n+1$-ième est le polynôme constante $(n+1)!$. On en déduit que $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Comme $F(x) = 0$, on obtient $\mathcal{P}_x$.

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \ \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.14. $\boxed{f^{(n+1)} \text{ est continue sur le segment } [a,b] \text{ et donc bornée sur ce segment}}$.
On remarque que

$$\forall x \in [a,b], \ |\pi_\sigma(x)| \leq (b-a)^n$$

Avec la propriété $\mathcal{P}_x$, on en déduit que

$$\boxed{\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty}$$

Q.15. On imagine ici que l'on se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0, 2\pi]$ et que l'on considère pour chaque n le polynôme $L_n(f)$ associé à $\sigma_n = \{x_0, \dots, x_n\}$. On définit alors une suite de polynômes. Comme sin et toute ses dérivées sont majorées en module par 1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit avec la question précédente que

$$\|f - L_n(f)\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, le majorant est de limite nulle et ainsi

$$\boxed{(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0, 2\pi]}$$

Q.16. On sait que

$$\forall x \in]-1,1[, \ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Quand une fonction est développable en série entière, son développement est nécessairement celui de Taylor. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ f^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$$

On en déduit que $\|f^{(2k)}\|_\infty \geq |f(0)| \geq (2k)!$ (la norme infinie existe puisque f est de classe C^∞ sur le segment $[-1,1]$).

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \|f^{(2k)}\|_\infty \geq (2k)!}$$