PRÉPAS ELBILIA
Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

تمُوني مُولاَي اسمَاعِيل

Contrôle n° 3 : Préhilbertiens

Durée : 2 heures

AVERTISSEMENT

L'usage de calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : e3a MP, 2019

Question de cours : Soit E un espace euclidien. Redonner sans démonstration la dimension de $E^{\perp}$.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $< P|Q > = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$

On note $\mathscr{B}_n = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de E.

Soit u l'application qui à $P \in E$ associe $u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \displaystyle\int_0^1 (x+t)^n\ P(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.

2.

2.1 Prouver que pour tous p et q dans $[\![0, n]\!]$, on a : $< u(X^p)|X^q > = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)(n+p+1-k)}$

2.2 En déduire que u est un endomorphisme symétrique.

3. On sait qu'il existe alors une base **orthonormale** $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $(\lambda_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$.

Montrer que : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, P_j(x)\ P_j(y)$.

Pour y réel, on pourra décomposer le polynôme $Q_y = (X+y)^n$ dans la base $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$.

4. Déterminer alors $\mathbf{tr}(u)$ (trace de l'endomorphisme u).

5.

5.1 Pour tout y réel, montrer que l'on a : $u(Q_y)(y) = \dfrac{1}{2n+1}\ \left[(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right]$.

5.2 Déterminer $\mathbf{tr}(u^2)$. On pourra calculer $\displaystyle\int_0^1 u(Q_y)(y)\,\mathrm{d}y$.

Exercice 2 : e3a MP, 2020

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose, pour tout couple $(P, Q) \in E^2$:

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur E un produit scalaire.
Dans la suite de cet exercice, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ce produit scalaire.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Donner sans démonstration la dimension de $F^{\perp}$.

3. On prend dans cette question $n = 2$
Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^{\perp}$.

4. On revient au cas général : $n \geqslant 2$ et soit $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$ non nul.

4.1. Déterminer le degré de L.

4.2. On pose, lorsque cela est possible, pour x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t)t^x\,\mathrm{d}t$.

4.2.1. Montrer que φ est une fonction rationnelle.

4.2.2. Déterminer les zéros et les pôles de φ. Donner pour chacun l'ordre de multiplicité.
On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ.

4.2.3. En déduire une expression de φ, à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.

4.3. En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle φ, donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.

Fin.

Corrigé

Exercice 1 : e3a MP, 2019

Question de cours: Dans un espace euclidien E, si F est un sous-espace vectoriel, alors $F \oplus F^{\perp} = E$ donc $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$.

Q1: Soit P et Q deux éléments de E. On a $u(\lambda P + \mu Q)(x) = \int_0^1 (x+t)^n (\lambda P + \mu Q)(t)\,dt = \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,dt + \mu \int_0^1 (x+t)^n Q(t)\,dt = \lambda u(P)(x) + \mu u(Q)(x)$ et cette égalité est vraie pour tout x donc $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$ donc u est linéaire. De plus, si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,dt = \int_0^1 \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i P(t) t^{n-i} dt = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i} \int_0^1 P(t) t^{n-i} dt\right) x^i$ donc $u(P) \in E$. De plus, si $u(P) = 0$, alors $\forall i \in [[0,n]]$, $\int_0^1 P(t) t^{n-i} dt = 0 = \left(P|X^{n-i}\right)$ donc $P \in vect(1, X, \dots, X^n)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$ donc $\ker(u) = \{0\}$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$ (endomorphisme de dimension finie).

Q2.1: On a $u(X^p) = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i} \int_0^1 t^{p+n-i} dt\right) X^i = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{i}}{p+n-i+1} X^i : (\mathcal{R})$ donc $(u(X^p)|X^q) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{i}}{p+n-i+1} (X^i|X^q) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{i}}{(p+n-i+1)(q+i+1)}$.

Q2.2: D'après la question précédente, $(u(X^q)|X^p) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{i}}{(q+n-i+1)(p+i+1)} \underset{j=n-i}{=} \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{n-j}}{(q+j+1)(p+n-j+1)} = (u(X^p)|X^q)$ car $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Soit $\phi : E \times E \to 0$ définie par $\phi(P,Q) = (u(P)|Q) - (u(Q)|P)$ est bilinéaire et $\forall (i,j) \in [[0,n]]^2$, $\phi\left(X^i, X^j\right) = 0$ donc $\phi = 0$ et donc u est un endomorphisme symétrique.

Q3: Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $Q_y = (X+y)^n$. On pose $Q_y = \sum\limits_{j=0}^{n} (Q_y|P_j) P_j$. Or $(Q_y|P_j) = \int_0^{+\infty} (t+y)^n P(t)\,dt = u(P_j)(y) = \lambda_j P_j(y)$ donc $Q_y = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) P_j$ donc $Q_y(x) = (x+y)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) P_j(x)$.

Q4: D'après $(\mathcal{R})$, les coefficients diagonaux de la matrice de u dans la base canonique sont $\dfrac{\binom{n}{p}}{n+1}$, $0 \leq p \leq n$ donc $tr(u) = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{p}}{n+1} = \dfrac{2^n}{n+1}$.

Q5.1: On a $u(Q_y)(y) = \int_0^1 (y+t)^n Q_y(t)\,dt = \int_0^1 (y+t)^{2n}\,dt = \dfrac{1}{2n+1}\left[(y+t)^{2n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2n+1}\left((y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right)$.

Q5.2: On a $\int_0^1 u(Q_y)(y)\,dy = \int_0^1 \dfrac{1}{2n+1}\left((y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right) dy = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)}\left[(y+1)^{2n+2} - y^{2n+2}\right]_0^1 = \dfrac{2^{2n+2}-1}{(2n+2)(2n+1)}$. Par ailleurs $u(Q_y) = u\left(\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) P_j\right) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j^2 P_j(y) P_j$ donc $\int_0^1 u(Q_y)(y)\,dy = \int_0^1 \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j^2 P_j(y) P_j(y)\,dy = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j^2 \int_0^1 P_j(y) P_j(y)\,dy = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ car $\|P_j\| = 1$. Or $tr\left(u^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ (se placer dans une base de vecteurs propres) donc $tr\left(u^2\right) = \dfrac{2^{2n+2}-1}{(2n+2)(2n+1)}$.

Exercice 2 : e3a MP, 2020

1. La bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent pas de problème.

Pour la non dégénérescence : Soit $P \in E$ tel que $\left\langle P \middle| P \right\rangle = 0$. On a $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,dt = 0$. P^2 est une fonction continue positive sur $[0,1]$ dont l'intégrale sur cet intervalle est nulle, ainsi P^2 est la fonction nulle sur $[0,1]$. Ainsi P s'annule une infinité de fois sur $[0,1]$, donc, comme il s'agit d'un polynôme, $P = 0_E$. Ainsi $\boxed{\left\langle . \mid . \right\rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}_n[X]}$.

2. Si F est un sev de E de dimension p, $F^{\perp}$ est un sous espace de E supplémentaire à F.

Donc $\dim\left(F^{\perp}\right) + \dim(F) = \dim(E)$ i.e. $\boxed{\dim\left(F^{\perp}\right) = n+1-p}$

3. Si $n = 2$. Comme $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension $p = 2$, $\mathbb{R}_1[X]^{\perp}$ est de dimension 1. On cherche donc les polynômes $Q = aX^2 + bX + c$ orthogonaux à tous les polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$. Il faut et il suffit que de tels polynômes soient orthogonaux à 1 et à X. Ainsi :

$$Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_1[X]^\perp \iff \begin{cases} \langle aX^2 + bX + c | 1\rangle = 0 \\ \langle aX^2 + bX + c | X\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6c \\ b = -6c \end{cases}$$

Ainsi , comme $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ est de dimension 1, $\boxed{(6X^2 - 6X + 1) \text{ constitue une base de } \mathbb{R}_1[X]^\perp}$.

4. .

4.1. $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \setminus \{O_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ donc $\deg(L) \leqslant n$.

Par l'absurde, si $\deg(L) < n$. Alors $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ donc, comme ces sous-espaces sont supplémentaires, L est nul ce qui est impossible car on a pris L non nul. Ainsi $\boxed{L \text{ est de degré } n}$

4.2. .

4.2.1. On écrit $L = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on a $a_n \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \to L(t)t^x$ est donc la fonction $t \to \sum_{k=0}^{n} a_k t^{k+x}$ qui est continue sur $]0,1]$ et intégrable si $x > -1$.

De plus $\varphi(x) = \int_0^1 L(t)t^x\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 a_k t^{k+x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+x+1}$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est une fonction rationnelle}}$. On identifiera dans la suite la fonction rationnelle et la fraction rationnelle

4.2.2. Les pôles de φ sont parmi les $-(k+1)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$, et ils sont au plus d'ordre 1 car $\left(\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)\right)\varphi$ est polynomiale.

L étant orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, les éléments de $[\![0,n-1]\!]$ sont au moins des zéros de φ d'ordre au moins 1.

En écrivant φ sous forme irréductible $\varphi = \frac{P}{Q}$ alors on a $\deg(P) \geqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n+1$. Donc φ est de degré supérieur ou égal à -1 avec égalité si et seulement si P est de degré n et Q de degré $n+1$

Or φ est la somme de fractions de la forme $\frac{a_k}{X+k+1}$ qui sont de degré -1 ou $-\infty$, correspondent à des poles différents et dans laquelle au moins un des termes est non nul $\frac{a_n}{X+n+1}$, donc la somme est de degré -1 . Ainsi P est degré n et Q de degré $n+1$

et donc $\boxed{\text{les poles de } \varphi \text{ sont les } -(k+1) \text{ pour } k \in [\![0,n]\!] \text{ et ils sont d'ordre 1}}$ et

$\boxed{\text{les zéros de } \varphi \text{ sont les } k \text{ pour } k \in [\![0,n-1]\!] \text{ et ils sont d'ordre 1}}$

4.2.3. Plus précisément, on écrit P sous la forme $P = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ et $Q = \beta \prod_{k=0}^{n}(X+k+1)$ avec λ et λ non nuls. Ainsi il existe $\alpha \neq 0$ tel que $\varphi = \alpha \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}$

4.3. On décompose en éléments simples la fraction $\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}$. On a : $\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{X+k+1}$

avec $b_k = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(-k-1-j)}{\prod_{j=0}^{k-1}(-k+j)\prod_{j=k+1}^{n}(-k+j)}$ en convenant que le produit sur une partie vide vaut 1.

Ainsi $b_k = (-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!\,k!\,(n\ -k)!}$.

Donc par unicité de la décomposition en éléments simples de φ, on a :

$\forall k \in [\![0,n]\!]\,, a_k = \alpha b_k = \alpha(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!\,k!\,(n-k)!}$.

Donc le polynome L vaut : $L = \alpha \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n+k)!}{k!\,k!\,(n-k)!} X^k$. Ainsi, comme on sait que $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ est de dimension 1, on a : $\boxed{\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \text{Vect}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n+k)!}{(k!)^2\,(n-k)!} X^k\right)}$