Prof. MAMOUNI
myismail.net

Devoir Maison

Réduction d'endomorphismes

EXERCICE1 **UN PRODUIT TENSORIEL**

Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on pose $A \otimes M = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$.

1-Montrer que $(AB) \otimes (MN) = (A \otimes M)(B \otimes N)$

2- Montrer que $\det(A \otimes M) = (\det A)^n (\det M)^2$

3- Déduire que $A \otimes M$ est inversible si et seulement si A et M le sont et dans ce cas $(A \otimes M)^{-1} = A^{-1} \otimes M^{-1}$

EXERCICE2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Exprimer χ_B en fonction de χ_A.

Exo3. (CCP 2002) Valeurs propres et sous-espaces propres de

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Exo4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$

B est-elle diagonalisable ?

Exo5. Déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X + 5$.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$

PROBLÈME (CCP 2018)

On note, pour n entier tel que $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à la réduction de matrices par blocs du type $\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre réels non tous nuls.

On rappelle qu'un produit de matrices par blocs se fait de manière similaire à un produit classique : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$ (chaque matrice bloc étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

On pourra utiliser sans démonstration que si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si T est un polynôme, $A = P^{-1}BP \Rightarrow T(A) = P^{-1}T(B)P$.

On rappelle que si A, B, C sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A.\det C$.

Questions préliminaires

L'objectif est de démontrer le résultat suivant : "une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, vérifiant $P(M) = 0$".

Pour cela on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

Q7. On suppose que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ $(p \geq 1)$ les valeurs propres distinctes de u. Démontrer que le polynôme $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)....(X-\lambda_p)$ est annulateur de u.

Q8. Réciproquement, on suppose que $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ sont r nombres réels distincts $(r \geq 1)$ tels que $Q = (X-\mu_1)(X-\mu_2)....(X-\mu_r)$ est un polynôme annulateur de u. En utilisant le lemme des noyaux, démontrer que u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que le spectre de u est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r\}$.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q9. On suppose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale D vérifiant : $V = PDP^{-1}$ (on précisera P^{-1}).

Q10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice Q est inversible, donner la matrice Q^{-1} et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q11. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice R inversible et une matrice Δ diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs : $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$?

Q12. On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent. On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Soit T un polynôme scindé à racines simples annulateur de cette matrice, calculer $T(A)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q13. Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P telle que $E = P\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Q14. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Q15. On suppose que la matrice F est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de F, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On note U' le polynôme dérivé de U.

Démontrer que $\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

Q16. Vérifier que le polynôme minimal de la matrice A est X. En déduire la valeur de la matrice A.

Q17. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Q18. On suppose que la matrice F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Exprimer le polynôme caractéristique de F en fonction de celui de A. En déduire que F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q19. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Applications

Q20. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par u.
On pourra s'inspirer de la question **Q10**.

Q21. En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple de ce problème (page **4**), démontrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

Q22. Utiliser la question **Q21** pour donner les solutions du système différentiel de fonctions inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 de la variable réelle t :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases}$$

(on ne demande pas de détails).

Q23. Sachant que la solution φ sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = MX$ vérifiant $\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ est la fonction $t \mapsto e^{tM} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ où e^{tM} désigne l'exponentielle de la matrice tM, déterminer la matrice e^{M}.

FIN

Questions préliminaires

Q.7 Par hypothèse, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ où les d_i sont tous des valeurs propres de u (il suffit de choisir une base de diagonalisation). $P(u)$ est alors représenté par $P(D) = \text{diag}(P(d_1), \dots, P(d_n))$. Chaque d_i étant racine de P, on conclut que $P(D) = 0$ et donc que $P(u) = 0$.

$$\boxed{P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p) \text{ est annulateur de } u}$$

Q.8 Les μ_i étant deux à deux distincts, les polynômes $X - \mu_i$ sont premiers entre eux deux à deux. Par lemme des noyaux,

$$\ker(Q(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \mu_i Id)$$

Q annulant u, cet espace est égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier. En ne conservant que les μ_i tels que $\ker(u - \mu_i Id) \neq \{0\}$ et en concaténant des bases de ces espaces, on obtient une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux font tous partie des μ_i. Ainsi,

$$\boxed{u \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable et } \text{Sp}(u) \subset \{\mu_1, \dots, \mu_r\}}$$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q.9 On a $\chi_V = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et les valeurs propres de V sont donc 1 et 2. Il y a deux valeurs propres et on est en dimension 2 et ainsi V est diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1. Comme $(2, -3)$ et $(1, -1)$ sont propres, ils engendrent chacun un sous-espace propre. On a

$$\boxed{V = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Q.10 En faisant un produit par bloc, on vérifie que Q est inversible d'inverse

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$$

(il suffit de vérifier que $QQ^{-1} = I_{2n}$). Un produit par blocs montre alors que

$$\boxed{Q^{-1} \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}}$$

ce qui donne la similitude voulue.

Q.11 On obtient

$$\boxed{\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0 \\ 0 & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}}$$

A est semblable à B elle même semblable à une matrice diagonale. Par transitivité de la relation de similitude,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$$

Q.12 On a vu que

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = QBQ^{-1}$$

Appliquons le polynôme T qui annule la matrice de droite :

$$0 = QT(B)Q^{-1}$$

En multipliant par Q^{-1} à gauche et Q à droite, on conclut que $T(B) = 0$.
On montre par une récurrence immédiate que $B^k = \text{diag}(A^k, (2A)^k)$ et en combinant linéairement, $T(B) = \text{diag}(T(A), T(2A))$.
On en déduit alors que

$$\boxed{T(A) = 0}$$

Ainsi , A est diagonalisable puisqu'elle est annulée par un polynôme scindé simple. Finalement,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A \text{ l'est}}$$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q.13 On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice E. On a

$$f(1,1) = (1,1) \quad \text{et} \quad f(-1,0) = (-3,-2) = -2(1,1) + (-1,0)$$

On peut alors obtenir la matrice de f dans la base $((1,1),(-1,0))$ et on le traduit matriciellement par

$$\boxed{P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Q.14 De manière similaire à précédemment, $Z = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et un calcul par blocs donne

$$\boxed{Z^{-1}\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}}$$

Q.15 Montrons par récurrence que

$$F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

- C'est vrai au rang $k = 0$ car $F^0 = I_{2n}$.
- Supposons le résultat vrai au rang k. Il suffit alors d'un calcul par bloc pour voir que cela reste vrai au rang $k+1$.

En notant $U = \sum_{k=0}^{d} u_k X^k$, on en déduit que

$$U(F) = \begin{pmatrix} U(A) & V(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad V(A) = -2\sum_{k=1}^{d} k u_k A^{k-1} = -2AU'(A)$$

Comme $U(F) = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} = 0}$$

Q.16 Ce qui précède montre que U et XU' annulent A et sont donc multiples du polynôme minimal de μ_A de A (l'ensemble des polynômes annulateurs étant l'idéal engendré par μ_A). On en déduit que μ_A divise $U \wedge XU'$.
Or, U étant scindé simple, U et U' sont premiers entre eux (aucun des diviseurs irréductible de U ne divise U') et donc $U \wedge XU' = U \wedge X$.
Ainsi, μ_A est un diviseur de X. Or $\deg(\mu_A) \geq 1$ (un polynôme constant non nul n'annule aucune matrice) et ainsi $\mu_A = X$ (μ_A est unitaire). Comme μ_A annule A, A est nulle.

$$\boxed{\mu_A = X \text{ et } A = 0}$$

Q.17 Si $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable alors F (qui lui est semblable) l'est aussi. On vient alors de voir que $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$ alors $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est nulle est donc diagonalisable.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A = 0}$$

Q.18 $\chi_F(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - F)$ est un déterminant bloc triangulaire. Avec la formule rappelée par l'énoncé,

$$\boxed{\chi_F = \chi_A^2}$$

Si F est trigonalisable alors χ_F est scindé et tout diviseur de χ_F l'est donc aussi. Ainsi, χ_A est scindé et A est trigonalisable.
Réciproquement, si A est trigonalisable alors χ_A est scindé et donc χ_F aussi. F est alors trigonalisable.

$$\boxed{F \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } A \text{ l'est}}$$

Q.19 Soit $A = \operatorname{diag}(M, 0)$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\chi_A = X^{n-2}(X^2+1)$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et A n'est donc pas trigonalisable. Avec la question précédente, F ne l'est pas.

Applications

Q.20 Si on pose $V = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (symétrique réelle). On vérifie aisément que $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres. Comme en Q10, on vérifie que $Q = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ et que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 3V & 0 \\ 0 & -V \end{pmatrix}$$

Cette forme diagonale par bloc montre que les sous-espaces engendré par les 2 premiers (resp. 2 derniers) vecteurs de la nouvelle base (celle formée par les colonnes de Q) engendrent un espace stable par l'endomorphisme u.

$$\boxed{\operatorname{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1)) \text{ et } \operatorname{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)) \text{ sont stables par } u}$$

Q.21 On a cette fois $M = \begin{pmatrix} 4I_2 & 2I_2 \\ 2I_2 & 4I_2 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (symétrique réelle) et on vérifie aisément que $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres (associés à 6 et 2). Comme en Q10, on vérifie que $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 6I_2 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{pmatrix}$$

Q.22 En notant $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$U'(t) = MU(t)$$

Le cours nous apprend que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 4. Si X est vecteur propre de M associé à λ, on vérifie que $t \mapsto e^{\lambda t}X$ est une solution. La question précédente donne alors quatre solutions indépendantes qui forment une base de l'ensemble des solutions. La solution générale est ainsi

$$\boxed{t \mapsto c_1 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Q.23 La solution telle que $\varphi(0) = (a, b, c, d)$ est associée à des constantes c_i telles que

$$P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

On a alors

$$e^M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \varphi(1) = c_1 e^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$e^M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 & e^2 \\ e^6 & 0 & -e^2 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 & -e^2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^M = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 & e^2 \\ e^6 & 0 & -e^2 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 & -e^2 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 & 0 \\ 0 & e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 \\ e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 & 0 \\ 0 & e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 \end{pmatrix}}$$