Devoir Maison

Réduction d'endomorphismes

EXERCICE 1 CCINP 2024 MP Mathématiques 2

Q1. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q2. Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

Problème CCP 2023

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E, alors :

$$\operatorname{Ker}[T(u)] = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u)) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q8. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.
On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \ldots + R_mQ_m = 1$.

Q9. On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
Démontrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E.
Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

Q10. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

(avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace propre caractéristique associé à λ_i.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$.

Q11. Démontrer que $E = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2 \oplus \ldots \oplus \text{Im } p_m$.

Q12. Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \text{Im } p_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

Q13. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q14. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.
Donner sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$, puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. Démontrer que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2.

(b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

(c) Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

Q17. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égale au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v.

Q18. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$.

Démontrer que la famille $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q20. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E, tels que, pour tout entier naturel q, on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q \, p_i$.

Nous allons étudier une "réciproque".

Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que, pour tout entier naturel q, on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q \, f_i$.

Démontrer que u est diagonalisable.

FIN

Proposition de corrigé

Exercice 1 CCINP 2024 MP Mathématiques 2

Q1. On peut commencer par le calcul du polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_2}}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 0 \\ X+2 & X-4 & X+2 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{lin. } C_1, C_3}{=} (X+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (X+2)^2(X-1)$$

On constate que le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des valeurs propres de A est $\{-2, 1\}$; la matrice $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang égal à 1, donc d'après le théorème du rang le sous-espace propre associé à la valeur propre double -2 est de dimension égale à 2 ; l'autre valeur propre, 1, est simple. On peut donc conclure que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On calcule pour $\lambda \in \{-2, 1\}$ le sous-espace propre $\mathrm{Sep}_\lambda(A)$ associé à la valeur propre λ, et on exprime chacun comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre :

$$\mathrm{Sep}_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \; ; \qquad \mathrm{Sep}_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ est inversible et ses colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de la matrice A, donc $P^{-1}AP = D$ où $D = \mathrm{Diag}(-2, -2, 1)$.

Q2. D'après la relation de récurrence de l'énoncé, la suite matricielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n \qquad \text{donc} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+1} = P^{-1}(AX_n) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X_n) = DY_n$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;\; Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} (-2)^n \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}}$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites coordonnées de la suite vectorielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, elles convergent simultanément si et seulement si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de sa topologie naturelle.
De même, les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; on vient d'établir que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc convergente, et que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raison -2, de valeur absolue strictement plus grande que 1, donc ces deux suites convergent si et seulement si $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.
Les endomorphismes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux matrices P et P^{-1} sont des applications continues pour la topologie naturelle de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, réciproques l'une de l'autre, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n = PY_n$ et $Y_n = P^{-1}X_n$; par conséquent, les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.
On conclut que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \;\; Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} \;\; \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et dans ce cas la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (PY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante aussi :

PROBLEME CCP 2023

Partie I

Q6. Un exemple -

$\triangleright$ La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

$\triangleright$ On vérifie facilement que : $\Pi_1^2 = \Pi_1$, $\Pi_2^2 = \Pi_2$ ainsi Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteur.

$\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$, $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$ et $\Pi_1\Pi_2 = 0$

Q7. u un endomorphisme de E et P et Q deux polynômes premiers entre eux.

$\triangleright$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$ donc $P(u)(x) = 0$ et $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ donc $[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$ ce qui donne $x \in \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$, ainsi $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).

$\triangleright$ On applique le théorème de Bézout : Il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Ce qui donne

$$\mathrm{Id}_E = (AP + BQ)(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$$

Donc si $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$, on a :

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$.

$\triangleright$ On a $\ker (P \times Q)(u) \subset \ker P(u) + \ker Q(u)$ et si $x \in \ker (P \times Q)(u)$, alors :

$$x = \underbrace{(A(u) \circ P(u))(x)}_{\in \ker Q(u)} + \underbrace{(B(u) \circ Q(u))(x)}_{\in \ker P(u)}.$$

En effet, $Q(u)(P(u) \circ A(u)(x)) = (A(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$ et
$P(u)(Q(u) \circ B(u)(x)) = (B(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u))$
Finalement on a montrer : $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.

Q8. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$, P_1 et P_2 sont premiers entre eux,$Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$.
Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne l'existence deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.
On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots {P_m}^{k_m}$ et pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$.

Q9. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots {P_m}^{k_m}$,pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$. $i \in \{1, 2, \dots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.

$\triangleright$ Il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ donc

$$R_1(u) \circ Q_1(u) + \dots + R_m(u) \circ Q_m(u) = id_E$$

par suite $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E}$.

$\triangleright$ Soit i, j des entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_iR_j)(u) \circ (Q_iQ_j)(u) \end{aligned}$$

et $Q_iQ_j = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}} \dfrac{\pi_u}{P_j^{k_j}} = \pi_u . \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i} P_j^{k_j}}$, *car* $P_i^{k_i} P_j^{k_j}$ *divise* π_u , par suite π_u divise Q_iQ_j , il est donc annulateur de u d'où $p_i \circ p_j = 0$.

$\triangleright$ Soit i dans $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \circ id_E \\ &= p_i \circ \sum_{j=1}^{m} p_j \\ &= p_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} p_i \circ p_j \end{aligned}$$

or si $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$ donc $p_i^2 = p_i$, et p_i est un projecteur .

Q10. On a $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $N_i = \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$.

Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux , le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\ker \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_u(u) = 0$ donc $\ker \chi_u(u) = E$ d'où

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$$

Q11. $\triangleright$ La somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe :

Soit $(y_1, ..., y_m) \in \operatorname{Im} p_1 \times \ldots \times \operatorname{Im} p_m$ tels que $y_1 + ... + y_m = 0$, il existe $x_1, ..., x_m$ dans E verifiant $y_i = p_i(x_i)$ pour tout i dans $\{1, ..., m\}$. Soit i, j distinct dans $\{1, ..., m\}$ alors

$$p_i(y_j) = (p_i \circ p_j)(x_j) = 0 \text{ et } p_i(y_i) = (p_i \circ p_i)(x_i) = p_i(x_i) = y_i$$

ce qui donne

$$p_i(y_1) + ... + p_i(y_m) = y_i = 0$$

donc $(y_1, ..., y_m) = (0, ..., 0)$, ce qui prouve que la somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe

$\triangleright$ $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$:

On a $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m \subset E$ et $p_1 + \ldots + p_m = id_E$ donc pour tout x dans E on a $x = p_1(x) + \ldots + p_m(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ par suite $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$, d'où $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$.

Ainsi on a $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m$

Q12. D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a π_u divise $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et l'ensemble des racines de π_u est exactement le spectre de u , donc $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ avec $0 < \beta_i \leq \alpha_i$, on a alors $P_i^{k_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, a l'indice près .

Soit $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $y_i = p_i(x_i) \in \operatorname{Im} p_i$, puisque $P_i^{k_i}$ divise $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $P_i^{k_i}(p_i) = \pi_u(u) = 0$ alors $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}(p_i) = 0$, par suite $y_i \in N_i$ et $\operatorname{Im} p_i \subset N_i$.

D'autre part $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$ donc

$$\dim(\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\operatorname{Im} p_m) = \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $\operatorname{Im} p_i \neq N_i$ donc $\dim(\operatorname{Im} p_i) < \dim(N_i)$ par suite

$$\dim(\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\operatorname{Im} p_m) < \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

ce qui est absurde donc $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ on a $\dim(\operatorname{Im} p_i) = \dim(N_i)$ et $\operatorname{Im} p_i = N_i$.

Partie II

Q13. u est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, et l'ensemble de ses racines est exactement le spectre de u d'où :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$$

Q14. On a , pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

▷ Avec un peut de détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

avec $a_i = \left[\dfrac{P_i(X)}{\pi_u(X)}\right]_{X=\lambda_i} = \left[\dfrac{1}{Q_i(X)}\right]_{X=\lambda_i} = \theta_i$ donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

▷ Cette relation donne

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i Q_i$$

suivant les notation de Q10 on a pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, p_i = \theta_i Q_i(u) = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. On suppose que $\deg \pi_u > 1$. On a $1 = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{\pi_u}{X-\lambda_i}$ donc

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{X-\lambda_i+\lambda_i}{X-\lambda_i} \pi_u \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \theta_i\right) \pi_u + \sum_{i=1}^{m} \theta_i \lambda_i Q_i(X) \end{aligned}$$

De la relation $\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X-\lambda_i}$ on a $\frac{x}{\pi_u(x)} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{x}{x-\lambda_i}$ et on fait tendre x vers $+\infty$, on obtient $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 0$, d'où

$$X = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \lambda_i Q_i(X) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)} \quad (*)$$

Par substitution de X par u on obtient

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i.$$

Si $\deg \pi_u = 1$: la relation $(*)$ n'a pas de sens, mais on a $\pi_u = X - \lambda_1$ et $u = \lambda_1 . p_1$ avec $p_1 = id_E$.

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Et $A^2 = 4I_4$.

b) On a $A^2 = 4I_4$ donc $X^2 - 4$ est annulateur de A et π_A divise $X^2 - 4$, A n'est pas de la forme αI_4 donc forcement $\deg \pi_A \geq 2$ par suite $\pi_A = X^2 - 4$.

On a

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{\theta_1}{X-2} + \frac{\theta_2}{X+2}$$

avec $\theta_1 = \left[\frac{X-2}{\pi_u(X)}\right]_{X=2} = \frac{1}{4}$ et $\theta_2 = \left[\frac{X+2}{\pi_u(X)}\right]_{X=-2} = \frac{-1}{4}$, donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{X+2} + \frac{1}{X-2}\right)$$

et $Q_1 = X - 2$, $Q_2 = X + 2$.

Par suite $\Pi_1 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(-2)} = \frac{-1}{4}(A - 2I_4)$ et $\Pi_2 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(2)} = \frac{1}{4}(A + 2I_4)$.

On trouve

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(-A + 2I_4) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) On a les relations :

- ▷ $A = \lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2$
- ▷ $\Pi_1.\Pi_2 = \Pi_2.\Pi_1 = 0$
- ▷ $\Pi_1^k = \Pi_1$, $\Pi_2^k = \Pi_2$ pour tout entier naturel k.

On btient pour tout entier naturel k $A^k = \lambda_1^k\Pi_1 + \lambda_2^k\Pi_2$, donc

$$A^k = 2^k\Pi_1 + (-2)^k\Pi_2 = 2^k\left(\Pi_1 + (-1)^k\Pi_2\right).$$

Ainsi pour tout entier naturel k on a

$$A^{2k} = 4^k I_4 \text{ et } A^{2k+1} = 4^k A$$

Q17. On a $\mathbb{C}[v] = \{P(v)\ , P \in \mathbb{C}[X]\}$, posons $\pi_v(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + .. + a_0$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ on effectue la division euclidienne de P par π_v :

$$P = Q\pi_v + R \text{ avec } \deg R \leq d-1,$$

par substitution on a

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v),$$

donc $P(v) \in \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$ et $\mathbb{C}[v] \subset \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$. Par suite $\dim \mathbb{C}[v] \leq d$.
Si on suppose que $\dim \mathbb{C}[v] \leq d-1$ alors la famille $\left\{id_E, v, ..., v^{d-2}\right\}$ est liée ainsi il existe un polynôme annulateur de v de degré inferieur à $d-1$ ce qui contredit le fait que , π_v est annulateur de degré minimal égal à d .
Donc $\dim \mathbb{C}[v] = d$.

Q18. On a $\deg \pi_u = m = \dim \mathbb{C}[u]$.
La famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre :
Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ dans $\mathbb{C}^m$ tels que $\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m = 0$, on compose par p_j , sachant que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_i \circ p_i = p_i$, on obtient $\alpha_j = 0$, ainsi $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre.
$(p_1, \ldots, p_m)$ est libre de cardinal m donc c'est une base de $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Si u non diagonalisable, *par exemple nilpotent non nul*, alors π_u n'est pas à racines simple et $\deg \pi_u > m$, donc la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ n'est pas génératrice et n'est pas une base de $\mathbb{C}[u]$.

Q20. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.
Donc pour tout polynôme P on a $P(u) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i$, en particulier le polynôme $P = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$ est annulateur à racines simples , donc u est diagonalisable .

Fin.