PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN

MP

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison

Séries de Fonctions

PROBLÈME
Séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type :
$$\sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \text{ où } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont deux suites de réels.}$$

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour une fonction f élément de $C_{2\pi}$, on notera, pour tout entier naturel n :

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Partie I - Exemples

Q5. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left[\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right]$ (il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

Q6. Écrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos x)\,\cos(\sin x)$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme la somme d'une série de fonctions.

Q7. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle, telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Q8. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie II - Propriétés

Une condition suffisante

Q9. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

Q10. Soient a et b deux réels quelconques.

Démontrer que le maximun sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto |a\cos x + b\sin x|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

Q11. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

Q12. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.

Q13. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\mathrm{d}x$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x$ pour $k \neq n$.

Q14. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

Q15. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \dfrac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx)].$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

Q16. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie, pour tout entier naturel n : $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum [\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)]$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)] \ .$$

Q17. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

Q18. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

Q19. En déduire les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Déduire alors de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Q20. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Q21. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?

Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q22. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \dfrac{n}{3^n}\cos(nx)$.

Exercice 1
Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a>1$ réel, démontrer que la série $\sum\frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x>1$. On pose :

$$I(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\ .$$

Démontrer que :

$$I(x)\leq\zeta(x)\leq I(x)+1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et on prend $x>1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}\ .$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n$ où $A_n=\{(a,b)\in A\ ,\ ab=n\}$.

Exercice 2
ESTIMATIONS NUMÉRIQUES D'INTÉGRALES

Notations

— Si f est une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ avec $a < b$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

— On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

Partie I - « Permutation limite-intégrale » et intégrale de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.$$

Q2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|I - s_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

Q5. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x \in [0, 1],\ |f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
En déduire que :

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.$$

RÉSEAU CPGE IBNGHAZI

MP* 1 (Rabat)

Corrigé

Problème : séries trigonométriques (CCP 2017)

Partie 1 : exemples

5. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \le \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \ge 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}$$
En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2-p\cos(x)}{p^2-2p\cos(x)+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$
Il reste à combiner les résultats pour $p=2$ et $p=3$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}+\frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

6. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$$
Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}$$

7. Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n\cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum(u_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

8. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

9. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)| \le |a_n|+|b_n|$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

10. On a $((.|.)$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2)$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a\cos(x)+b\sin(x)| = |((a,b)|(\cos(x),\sin(x)))| \le \|(a,b)\|\cdot\|(\cos(x),\sin(x))\| = \sqrt{a^2+b^2}$$
De plus, il y a un cas d'égalité :

- c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x), \sin(x))$.

11. Posons $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|u_n\|_\infty)$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbb{R}$ quand c'est le cas pour x si $n > 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2 + b^2} \geq \begin{cases} |a_n| \\ |b_n| \end{cases}$$

Par comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ et $\sum(b_n)$ convergent absolument.

Autres propriétés

12. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la séries étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f.
La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité (si $S_n(x + 2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π-périodique et

$$f \in C_{2\pi}$$

13. On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. On a donc

$$\forall n \geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx + nx) + \sin(kx - nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$ (évident si $p = 0$, par primitivation en $-\frac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\forall n, k,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\ dx = 0$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos(kx)\cos(nx) + b_k \sin(kx)\cos(nx))\ dx$$

Posons encore $u_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. On a $\forall x,\ |u_k(x)\cos(nx)| \leq |u_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi, \pi]$ et on est dans le cas simple où on peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\ dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx))\ dx \right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,

$$\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f) \ \text{ et } \ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$$

15. Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

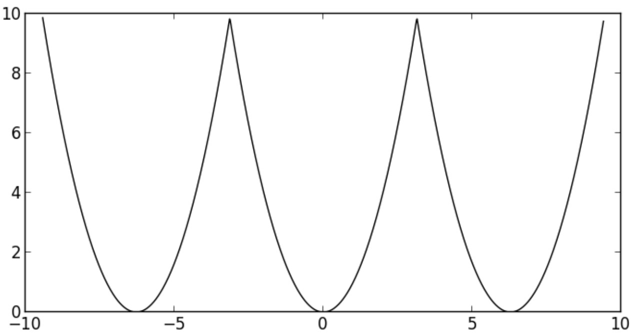
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \ \text{ et } \ \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

16. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g-f) = \beta_n(g-f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.
17. Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,
$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0$$
$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$$
18. Utilisons un petit script Python. Pour calculer $f(x)$, on cherche un entier k tel que $x - 2k\pi = y \in [-\pi, \pi]$ et on renvoie y^2.

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

def f(x):
    k=floor((x+pi)/(2*pi))
    return (x-2*k*pi)**2

a,b=-3*pi,3*pi
pas=(b-a)/1000
lx=[a+k*pas for k in range(1000)]
ly=[f(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly,'k')
plt.axis('scaled')
plt.show()
```



La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus
$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx$$
Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,
$$\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

19. Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

20. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0,1]$ (ce n'est même pas une intégrale généralisée).
Utilisons le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\, dx$$

On veut intervertir somme et intégrale. Je choisis le théorème d'intégration terme à terme.

- $g_n\ :\ x \mapsto (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$ est le terme général d'une série de fonctions continue qui converge simplement sur $]0,1[$ vers $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- La somme simple est continue sur $]0,1[$.
- g_n est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1 |g_n(x)|\, dx = \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente.

L'interversion est licite et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

21. Dans l'exemple de la question 18, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).
Supposons que $\sum(na_n)$ et $\sum(nb_n)$ sont des séries absolument convergente. Montrons qu'alors en posant $u_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $\sum(u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de régularité des sommes de séries fonctions.
    - $\forall n,\ u_n \in C^1(\mathbb{R})$ et $u_n'(x) = -na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx)$.
    - $\sum(u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
    - $\|u_n'\|_\infty \leq |na_n| + |nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $\sum(u_n')$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

    Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe C^1 mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.
22. On a vu en question 5 que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$
On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}$$

Exercice 1
Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

CCINP Mathématiques 1 MP 2021 : un corrigé

Jérémy Larochette – Lycée Carnot – Dijon

Partie II

Q9. Soit $a > 1$ et $\gamma \in]1, a[$. Comme $0 \leqslant \dfrac{\ln n}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ car, par croissances comparées, $\dfrac{\ln n}{n^{a-\gamma}} \to 0$, et comme la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^\gamma}$ converge, par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\boxed{\sum \dfrac{\ln n}{n^a} \text{ converge.}}$

Q10. H1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x \ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, et $f_n' : x \mapsto -\dfrac{\ln n}{n^x}$.

H2. $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ comme série de Riemann convergente.

H3. Soit $a > 1$. Pour tout $x \geqslant a$, $|f_n'(x)| = \dfrac{\ln n}{n^x} \leqslant \dfrac{\ln n}{n^a}$ qui est un terme général de série convergente d'après la question précédente, indépendant de x.
Donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Ainsi, par théorème de transfert de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{\zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1, +\infty[}$ et $\zeta' : x \mapsto -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^x} \leqslant 0$ donc $\boxed{\zeta \text{ décroît.}}$

Q11. Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]1, +\infty[$, le théorème de la double limite s'appliquerait au voisinage de 1 et en particulier $\sum \lim\limits_{1^+} f_n = \sum \dfrac{1}{n}$ convergerait ce qui est contradictoire.
$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]1, +\infty[.}$

Q12. Par contre $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[2, +\infty[$ car si $x \geqslant 2$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ terme général de série convergente indépendant de x.

Le théorème de la double limite peut donc s'appliquer, avec $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \delta_{n,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\boxed{\zeta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{n,1} = 1.}$

Q13. Soit $x > 1$. $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, ce qui permet de faire une comparaison série intégrale. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ l'intégrale de Riemann $I(x)$ étant bien convergente avec $x > 1$, $\boxed{I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x) + 1.}$

Or $I(x) = \left[\dfrac{1}{(-x+1)t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{x-1}$, donc $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \dfrac{1}{x-1} + 1$ et $1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant 1 + (x-1)$ donc $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 1$ par encadrement et enfin $\boxed{\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}.}$

Q14. Il y a une imprécision dans l'énoncé : d_n désigne manifestement le nombre de diviseurs **positifs** de n.
$\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A} = \left(\frac{1}{a^x}\times\frac{1}{b^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est une « suite double produit » $\boxed{\text{sommable}}$ car les séries $\sum_{a\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^x}$ et $\sum_{b\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{b^x}$ sont absolument convergentes (les termes sont positifs) de somme le produit des sommes, c'est-à-dire $\boxed{\text{de somme } \zeta(x)^2.}$ En effet, les termes sont positifs, pour tout $a\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{b\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(ab)^x}$ converge vers $\frac{\zeta(b)}{a^x}$ et $\sum_{a\in\mathbb{N}^*}\frac{\zeta(x)}{a^x}$ converge vers $\zeta(x)^2$.

On pose $A_n=\{(a,b)\in A,\ ab=n\}$, et alors $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n=\mathbb{N}^*}$ et les $\boxed{A_n \text{ sont deux à deux disjoints.}}$

Donc, par sommabilité et théorème de sommation par paquet, on peut écrire, la série étant convergente

$$\sum_{(a,b)\in A}\frac{1}{(ab)^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{(ab)^x}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{n^x}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|A_n|}{n^x}.$$

Or $|A_n|=|\{(a,b)\in\mathbb{N}_*^2,\ n=ab\}|=\left|\left\{\left(a,\frac{n}{a}\right)\text{ avec } a \text{ diviseur positif de } n\right\}\right|=d_n$.

Finalement, $\boxed{\zeta(x)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}.}$

Exercice 2
ESTIMATIONS NUMÉRIQUES D'INTÉGRALES

CCP MP1 2018
Un corrigé

1 "Permutation limite-intégrale" et intégrales de Gauss

1.1 Utilisation d'une série entière

Q.1. La fonction exp est développable en série entière entière de rayon de convergence infini et

$$\forall t\in\mathbb{R},\ e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$$

En utilisant ceci avec x^2, on en déduit que

$$I=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)}\,dx$$

$f_n\ :\ x\mapsto(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)}$ est continue sur $[0,1]$ et $\|f_k\|_\infty=\frac{1}{k!}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_k)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0,1]$. On est dans le cas simple où l'interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$I=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 x^{2k}\,dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}}$$

Q.2. $u_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est le terme général d'une suite alternée, décroissante en module et convergente de limite nulle. La règle spéciale s'applique à la série $\sum(u_k)$. Elle indique que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\right|\le|u_{n+1}|$$

1.2 Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q.5. Soit $x \geq 0$. $x^2/n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{2}$. Pour ces n, $1 - \frac{x^2}{n} > 0$ et donc

$$\forall n \geq n_0,\ f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$$

Le terme dans l'exponentielle équivaut, quand $n \to +\infty$, à $n \times \left(-\frac{x^2}{n}\right) = -x^2$ et tend donc vers $-x^2$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc $f_n(x) \to e^{-x^2}$ quand $n \to +\infty$.

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simpelment sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers } x \mapsto e^{-x^2}}$$

Q.6. Par concavité de la fonction logarithme,

$$\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$$

Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x^2/n \in [0,1]$. Si $x^2/n \in [0,1[$ alors (croissance de exp et notre inégalité de concavité)

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{-x^2}$$

et le résultat reste vrai si $x^2/n = 1$ ($0 \leq e^{-x^2}$ dans ce cas). Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}}$$

Utilisons alors le théorème de convergence dominée.
- (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction continue sur $[0,1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ puisque continue sur le SEGMENT.

Le théorème s'applique et donne

$$I = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

On développe la puissance par formule du binôme et par linéarité du passage à l'intégrale,

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{n}\right)^k\ dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}}$$