My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison

Déterminants

Exercice 1 (CCP 2022)

Pour n entier, $n \geq 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1, x_2 \dots, x_n$ par :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q1. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1, x_2 \dots, x_n$ deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1, x_2 \dots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.

Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2 \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q3. Première application

Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \dots, n)$.

Q4. Deuxième application

Donner un exemple de n nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.

Soit n nombre complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \quad \cdots \sum_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

Exercice 2 (CNC 2019)

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se notera I_p. Si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant et ${}^tM$ sa transposée.

$1^{\text{ère}}$ Partie : Calcul du déterminant de Cauchy

On considère un entier $n \geq 2$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ . \ . \ . \ , n\}^2$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le déterminant *de Cauchy* d'ordre m, associé aux familles $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$, est le nombre, noté Δ_m, égal au déterminant de la matrice $\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leq i,j\leq m}$

2.1. On suppose qu'il existe $(i_1, i_2) \in \{1, \ . \ . \ . \ , \ n\}^2$, avec $i_1 \neq i_2$, tel que $a_{i_1} = a_{i_2}$. Justifier que $\Delta_n = 0$.

On suppose désormais que les réels $a_1, ..., a_n$ sont deux à deux distincts et on considère la fraction rationnelle

$$R = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(X - b_j)}{\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)}$$

2.2. Justifier que les polynômes $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - b_k)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux.

2.3. **Décomposition en éléments simples de la fraction R**

2.3.1. Préciser les pôles de la fraction rationnelle R et vérifier qu'ils sont tous simples.

2.3.2. En déduire que la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction R est de la forme $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X + a_k}$ en précisant tes expressions des α_k en fonction des a_k et des b_k.

2.4. **Application au calcul de Δ_n**

2.4.1. Montrer que $\alpha_n\Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 + b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$.

2.4.2. En déduire que $\alpha_n\Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

2.4.3. Calculer Δ_2 puis montrer que, pour tout $n \geq 2, \Delta_n = \dfrac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}$.

Corrigé

Exercice 1 (CCP 2022)

Q 1. On a $V(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ donc $\boxed{V(x_1,x_2) = x_2 - x_1.}$

Soit un n-uplet $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, tel qu'il existe deux indices $(i_0,j_0) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i_0 \neq j_0$ et $x_{i_0} = x_{j_0}$.
Alors la matrice de Vandermonde $((x_j)^{i-1})_{1\leq i,j\leq n}$ possède deux colonnes identiques, les colonnes i et j, donc elle n'est pas inversible et son déterminant $V(x_1,\ldots,x_n)$ est nul.
La formule annoncée est bien vérifiée dans ce cas : $V(x_1,\ldots,x_n) = 0 = \displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$.

$\boxed{\text{Donc il suffit de faire la démonstration pour } n \text{ nombres complexes deux à deux distincts } x_1,\ldots,x_n.}$

Q 2. • Soient $x_1,\ldots,x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On considère la fonction

$$P : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \mapsto & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & V(x_1,\ldots,x_{n-1},t). \end{array} \right. .$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, il existe des coefficients $a_0,\ldots,a_{n-2}$ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$P(t) = V(x_1,\ldots,x_{n-1},t) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{n-1} & t \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & t^{n-1} \end{vmatrix} = V(x_1,\ldots,x_{n-1})t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1 t + a_0.$$

Donc $\boxed{P \text{ est une fonction polynomiale de degré au plus } n-1, \text{ et le coefficient devant } t^{n-1} \text{ vaut } V(x_1,\ldots,x_{n-1}).}$

• D'après la question **Q 1**, on a $\forall k \in [\![1,n-1]\!], P(x_k) = 0$ donc P possède $n-1$ racines distinctes $x_1,\ldots,x_{n-1}$.
D'où

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad P(t) = V(x_1,\ldots,x_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(t - x_k).$$

En particulier, on obtient la relation de récurrence :

$$V(x_1,\ldots,x_n) = P(x_n) = V(x_1,\ldots,x_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k).$$

• Montrons par récurrence sur $n \geq 2$:

$$(H_n) : \text{si } (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n \text{ sont deux à deux distincts, alors } V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i).$$

Initialisation : cas $n = 2$. Soit $x_1 \neq x_2$ deux nombres complexes.
On a montré à la question **Q 1** que $V(x_1,x_2) = x_2 - x_1 = \displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq 2}(x_j - x_i)$.

Hérédité : supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons-le au rang n.
Soient $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ deux à deux distincts.
Par hypothèse de récurrence, $V(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(x_j - x_i)$. Il vient

$$V(x_1,\ldots,x_n) = V(x_1,\ldots,x_{n-1})\left(\prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)\right) = \left(\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(x_j - x_i)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)\right) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i),$$

ce qui achève la récurrence.

- Le résultat est encore valable si les x_k ne sont pas deux à deux distincts (d'après la question **Q 2**), d'où :

$$\boxed{\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n,\quad V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).}$$

Q 3. Soit la matrice A suivante, que l'on transpose :

$$A=(i^j)_{1\le i,j\le n}=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\2&2^2&\dots&2^n\\ \vdots&&&\vdots\\ n&n^2&\dots&n^n\end{pmatrix},\quad {}^tA=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\1&2^2&\dots&n^2\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&2^n&\dots&n^n\end{pmatrix}.$$

Par multilinéarité du déterminant :

$$\det(A)=\det({}^tA)=2\times 3\times\dots\times n\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\1&2&\dots&n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&2^{n-1}&\dots&n^{n-1}\end{vmatrix}=n!\ V(1,2,\dots,n).$$

Ainsi

$$\det(A)=n!\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)=n!\prod_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\right)=n!\prod_{j=2}^{n}(j-1)!=n!\prod_{j=1}^{n-1}j!=\prod_{j=1}^{n}j!=\prod_{j=2}^{n}j!\ .$$

On a ainsi $\boxed{\det(A)=n!\ V(1,2,\dots,n)=\prod_{j=2}^{n}j!=\prod_{k=2}^{n}k^{n+1-k}.}$

Q 4.
- Soit $n\ge 2$. On pose $\forall k\in[\![1,n]\!], a_k=e^{ik\pi/n}$.
  Les $(a_k)_{1\le k\le n}$ sont des nombres complexes deux à deux distincts et tous non nuls, car ce sont des racines $(2n)$-ièmes de l'unité distinctes. La somme suivante fait apparaître une somme géométrique de raison $e^{i2\pi/n}\neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ik\pi/n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}e^{ik2\pi/n}=\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik2\pi/n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i2\pi/n}\right)^k=\frac{1-\left(e^{i2\pi/n}\right)^n}{1-e^{i2\pi/n}}=\frac{1-1}{1-e^{i2\pi/n}}=0.$$

$$\boxed{\text{En posant }\forall k\in[\![1,n]\!], a_k=e^{ik\pi/n},\text{ on a }\sum_{k=1}^{n}a_k^2=0\text{ et les }(a_k)_{1\le k\le n}\text{ sont deux à deux distincts et tous non nuls.}}$$

- Soient n nombres complexes $x_1,\dots,x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls.
  On suppose par l'absurde que toutes les sommes $\sum_{k=1}^{n}x_k,\ \sum_{k=1}^{n}x_k^2,\dots,\sum_{k=1}^{n}x_k^n$ sont nulles. Posons :

$$B=(x_j^i)_{1\le i,j\le n}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&\dots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\dots&x_n^2\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ x_1^n&x_2^n&\dots&x_n^n\end{pmatrix}.$$

  On effectue l'opération suivante sur les colonnes de B : $C_1\leftarrow C_1+C_2+\dots+C_n$, i.e. on ajoute à la première colonne de B toutes les autres colonnes. Cela ne modifie pas le déterminant de B.

$$\det(B)=\det\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}x_k&x_2&\dots&x_n\\ \sum_{k=1}^{n}x_k^2&x_2^2&\dots&x_n^2\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \sum_{k=1}^{n}x_n&x_2^n&\dots&x_n^n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&x_2&\dots&x_n\\0&x_2^2&\dots&x_n^2\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&x_2^n&\dots&x_n^n\end{pmatrix}=0.$$

Calculons $\det(B)$ en faisant apparaître un déterminant de Vandermonde. Par multilinéarité du déterminant :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) V(x_1, \dots x_n).$$

Les x_k sont tous non nuls, donc $\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) \neq 0$.

Les x_k sont deux à deux distincts, donc $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$.

Il vient $0 = \det(B) = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) V(x_1, \dots x_n) \neq 0$, ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\text{l'une au moins des sommes } \sum_{k=1}^n x_k,\ \sum_{k=1}^n x_k^2, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n \text{ est non nulle.}}$

Exercice 2 (CNC 2019)

2.1. Si deux des a_i sont égaux, Δ_n est nul car il s'agit d'un détermiant d'une matrice dont deux de ses lignes sont égales.

2.2. Les deux polynômes $\prod_{k=1}^{n-1}(X-b_k)$ et $\prod_{k=1}^{n}(X+a_k)$ sont scindés et sans aucune racine commune, donc ils sont premiers entre eux

2.3. Décomposition en éléments simples de R

2.3.1. La fraction rationnelle $R=\dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(X-b_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+a_k)}$ est irréductible dont les pôles $-a_1,\cdots,-a_n$ qui sont deux à deux distincts, donc ils sont simples

2.3.2. On a $\deg(\mathrm{R})=-1<0$. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ tels que $R=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k}{X+a_k}$. Les pôles sont simples, donc

$$\alpha_k=\left[(X+a_k)\,R\right]_{X=-a_k}=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(-a_k-b_j)}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(a_j-a_k)}=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(a_k+b_j)}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(a_k-a_j)}$$

2.4. Application au calcul de Δ_n

2.4.1. Pour $i\in[\![1,n]\!]$; on pose L_i la i-ème ligne de la matrice $\left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et B_n la matrice dont les lignes $L_1, \cdots, L_{n-1}$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i$. D'une part

$$\det(B_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a_i+b_1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a_i+b_{n-1}} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a_i+b_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \det(B_n) &= \det\left(L_1, \cdots, L_{n-1}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \det\left(L_1, \cdots, L_{n-1}, L_i\right) \quad \text{det est } n\text{-linéaire} \\ &= \alpha_n \det\left(L_1, \cdots, L_{n-1}, L_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\det\left(L_1, \cdots, L_{n-1}, L_i\right)}_{=0} \quad \text{det est alternée} \\ &= \alpha_n \Delta_n \end{aligned}$$

Par transitivité

$$\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$$

2.4.2. Comme $b_1, \cdots, b_{n-1}$ sont les racines de R, alors pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $R(b_i) = 0$ et, par suite,

$$\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & R(b_n) \end{vmatrix}$$

puis on développe le déterminant du second membre de l'égalité précédente par rapport à la dernière ligne, on obtient

$$\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix} = R(b_n)\Delta_{n-1}$$

2.4.3. • Calcul de Δ_2. On a :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_2)} \\ &= \frac{a_1b_1+a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)} \\ &= \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}\end{aligned}$$

• On démontre l'égalité par récurrence sur $n \geqslant 2$

– Pour $n=2$, l'inégalité est vérifiée

– Soit $n \geqslant 2$, on suppose que $\Delta_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i+b_j)}$. On fait appel à l'inégalité trouvée à la question **2.4.2.**, alors $\Delta_{n+1} = \dfrac{R(b_{n+1})}{\alpha_{n+1}}\Delta_n$. Or $R(b_{n+1}) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(b_{n+1}-b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_k)}$ et $\alpha_{n+1} = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}+b_j)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}-a_j)}$, alors

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(b_{n+1}-b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_k)} \times \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}-a_j)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}+b_j)} \times \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}(a_i+b_j)}\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence