.

Devoir Maison

Intégrales à Paramètres

CCP 2023

PROBLÈME

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Q10. Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q11. 1[re] tentative

Pour tout $x\in\,]0,1[$, on pose $f_n(x)=(-1)^n\,x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x\in\,]0,1[,\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q12. 2e tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q13. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}\right).$$

Q14. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Q15. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q16. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q17. Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q18. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

Q19. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

Q21. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q22. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Q23. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Q24. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

FIN

PROBLÈME

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est <u>continue</u> et <u>positive</u> sur $]0,1]$ ainsi que sur $[1,+\infty[$

En 0, on a $\varphi(t) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}x$ est intégrable car $1-\alpha < 1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $]0,1]$.

En $+\infty$, on a $\varphi(t) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x$ est intégrable car $2-\alpha > 1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Q10. On a successivement :

$$\begin{aligned}
I(1-\alpha) &= \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{on effectue le changement de variable } x = \frac{1}{u} \\
I(1-\alpha) &= \int_{+\infty}^1 \frac{u^\alpha}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= J(\alpha)
\end{aligned}$$

Q11. Pour x fixé dans $]0,1[$, $f_n(x)$ est le terme général d'une série géométrique et $|f_n(x)|<1$, la série est donc convergente :

On a donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$

supposons que la série converge uniformément sur $]0,1[$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1} f_n(x) = (-1)^n$

Le théorème de la double limite entraînerait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ converge ce qui n'est pas le cas.

Donc la série ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

Q12. Comme $\displaystyle S_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

On note $\displaystyle\varphi_n : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \varphi_n(x)$ est continue sur $[0,1]$.
- $\forall x \in]0,1[$, $\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) = 0$ et φ est continue par morceau sur $]0,1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $\displaystyle|\varphi_n(x)| \leq \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\times 2$ et la fonction $\displaystyle x \mapsto 2\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après la question 19.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = I(\alpha)$

Comme $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{\alpha+k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $\displaystyle I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

Q13. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $\displaystyle I(\alpha)+J(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

par ailleurs :

$$\begin{aligned}
I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1-\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha + k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{-\alpha + 1 + k} \\
&\text{on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme } p = k+1 \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha + k} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha + p} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha + n} - \frac{1}{-\alpha + n} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-2\alpha)}{-\alpha^2 + n^2} \\
I(\alpha) + J(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}
\end{aligned}$$

Q14. En posant $x = 0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{sin(\pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q15. Soit $x > 0$, on note $\psi_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

ψ_x est continue et positive sur $]0, +\infty[$

$\psi_x(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ donc par équivalent avec une intégrale de Riemann, $\int_0^1 \psi_x(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

$t^2\psi_x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\psi_x(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \psi_x(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

Ainsi Γ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Q16.

- Pour $x = 0$, on retrouve $f_\alpha(0) = \frac{\pi}{sin(\alpha\pi)}$ d'après la question 14.
- Pour $x > 0$, $\mu : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$

  $\mu(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ et on prouve comme à la question 9 que $\int_0^1 \mu(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

$t^2\mu(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\mu(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \mu(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi f_α est bien définie sur $[0, +\infty[$.

Démontrons maintenant que f_α est continue sur $[0, +\infty[$.

On note λ la fonction définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par $\lambda : (x, t) \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, e^{-xt}$

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \lambda(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \mapsto \lambda(x, t)$ est continue par morceau (car continue) sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|\lambda(x, t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ et $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 9.

Donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction f_α est continue sur $[0, +\infty[$.

Q17. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$, on conserve la notation de λ de la question précédente que l'on définit cette fois sur $[a, b]\times]0, +\infty[$

- $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto \lambda(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 16 (comme elle est positive, le fait que l'intégrale soit définie équivaut au fait que la fonction soit intégrable).
- $\forall t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \lambda(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$
- $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $\forall (x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-at}$ et $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et c'est un $\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$

On peut donc conclure par théorème de dérivation que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
Ceci étant pour tout a et b de $]0, +\infty[$, on en conclut que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et $f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

Q18. On applique cette fois-ci le théorème de convergence dominée généralisée

Soit $x > 0$, on note $\lambda_x : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, e^{-xt}$ définie sur $]0, +\infty[$

- $\forall x > 0$, $t \mapsto \lambda_x(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $\forall t \in]0, +\infty[$, $\lambda_x(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda(t) = 0$ et $t \mapsto 0$ est continue par morceau sur $]0, +\infty[$
- $\forall (x, t) \in (]0, +\infty[)^2$, $|\lambda_x(t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ et $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (vu question précédente)

Donc par théorème de convergence dominée généralisée :

$$\underset{x\to+\infty}{lim} f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \underset{x\to+\infty}{lim} \lambda_x(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Q19. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$,

$\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha < 1$ donc par équivalent $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

et $t^2\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

On montre ainsi que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

On a donc, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

L'intégrale étant convergente, on en déduit que

$$\underset{x\to+\infty}{lim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Avec les calculs précédents et la linéarité de l'intégrale on a :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}+t^\alpha}{t+1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

on effectue le changement de variable $u = xt$

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} e^{-u}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

Q21. Calcul préliminaire, on note $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

On a g qui est définie d'après la question 19 et de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$

g_α est donc de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

et on a

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha)e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \Gamma(\alpha)e^x\left(-\frac{e^{-x}}{x^\alpha}\right) \\ &= g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

Considérons l'équation différentielle : $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ pour $x > 0$

L'équation sans second membre associée est $y' - y = 0$ dont les solutions sont $y(x) = k\,e^x$ où k est un réel.

Comme g_α est une solution particulière de l'équation les solutions de l'équation complète sont $y(x) = k\,e^x + g_\alpha(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

f_α étant solution de cette équation, on en déduit qu'il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = k\,e^x + g_\alpha(x)$.

Il reste à déterminer la valeur de k.

On a de l'équation précédente l'égalité $e^{-x} f_\alpha(x) = k + \Gamma(\alpha) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

En utilisant les résultats des questions 18 et 19, on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ que $k = 0$.

On conclut ainsi que $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q22. En posant $x = 0$ dans l'égalité précédente, on aurait l'égalité souhaitée, mais l'égalité ne vaut que pour $x > 0$.

On sait d'après la question 16 que f_α est continue sur $[0, +\infty[$

On a donc :

$$\begin{aligned}
f_\alpha(0) &= \lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) \quad \text{(par continuité de } f_\alpha \text{ en } x = 0) \\
&= \lim_{x\to 0} g_\alpha(x) \quad (\text{car } f_\alpha = g_\alpha \text{ pour } x > 0) \\
&= \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'autres part, comme $f_\alpha(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t$, on obtient l'égalité demandée.

Q23. On sait d'après la question 14 que $f_\alpha(0) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

avec l'égalité de la question précédente, on a donc

$\dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha) \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$

Q24. On pose $u = t^2$ dans l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, avec la question précédente et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$

On en déduit que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive)

Et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1125 – D'après documents fournis