My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'Exercices : Réduction

Endomorphismes cycliques

Dans toute la suite, E un IK-ev de dimension finie égale à n supérieur ou égale à 2.

Exo 1

Matrice Compagnon

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la *matrice compagne* de P :

$$\mathcal{C}(P) := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix};$$

Montrer que $\chi_{\mathcal{C}(P)} = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$

Exo 2

Endomorphisme cyclique et matrice compagnon.

1. Rappeler la définition d'endomorphisme cyclique
2. Montrer que tout endomorphisme nilpotent, d'indice de nilpotence égale à n, est cyclique.
3. Montrer que tout endomorphisme de E qui admet exactement n valeurs propres est cyclique.
4. Soit u un endomorphisme cyclique

   a) Montrer qulelle existe une base B de E tel que la matrice de u dans B est une matrice compagnon

   b) Montrer que $(id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.

   d) En déduire que le degré son polynôme minimal est supérieur où égal, puis est égal à n

   d) En déduire que son polynôme minimal vérifie $\pi_u(X)=\lambda_u(X)$.

Exo 3

Commutant dfun endomorphisme cyclique

On appelle commutant de f l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Soit $g \in \mathcal{C}(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

a Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_m f^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

b Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.

c Établir que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

d Montrer que $(\mathrm{Id}, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est libre

e En déduire que $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$ et que leur dimension est ègale à n

Exo 4 ne démonstration du théorème de Cayley amilton

1 Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0.$$

2 Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.

3 Montrer que : $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.

4 Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

Exo 5 Diagonalisation dfune matrice compagnon

Q1: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a Montrer que M et $M^\top$ ont même spectre.

b Montrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

Q2. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a Soit λ une valeur propre de $C_Q^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

b Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Exo 6 Etude de la réciproque

. Pour $u \in \mathrm{L}(E)$ et $P \in k[X]$ on notera parfois simplement Pu au lieu de $P(u)$. On considère le morphisme d'algèbres

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} k[X] & \to & \mathrm{L}(E) \\ P & \mapsto & Pu \end{array}$$

Étant donné en plus un $x \in E$ on peut considérer le morphisme de k-espaces vectoriels

$$\varphi_x\colon \begin{array}{ccc} k[X] & \to & E \\ P & \mapsto & Pu(x) \end{array}$$

On note μ resp. μ_x le générateur unitaire du noyau de φ, resp. φ_x. On note $k[u]$ resp. E_x l'image de φ, resp. de φ_x

1) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\mu_x | \mu$.

2) Soit $\mu = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs irréductibles, et $E_i = \ker(P_i^{\alpha_i} u)$.

   i) Justifier l'existence de $x_i \in E_i$ tel que $P_i^{\alpha_i - 1}u(x) \neq 0$

   ii) Montrer alors que $\mu_{x_i} = P_i^{\alpha_i}$

   iii) On pose $a = x_1 + \cdots + x_r$, montrer alors que $\mu_a = \mu$.

3) En déduire que les assertions suivantes sont équivalents

   (1) *u est cyclique.*

   (2) $\mu = \chi$.

   (3) *l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u est égal à*