

# Suites et Séries d Applications

## Devoir Maison (Type CCP)

### Théorème de Stone-Weierstrass

Démonstration par les polynômes de Bernstein

Soit  $E$  un evn de dimension finie .  $C^0([0, 1], E)$  est muni de la norme de la convergence uniforme

$$N_\infty(f) = \sup(\|f(t)\|, t \in [0, 1])$$

On pose pour tout entiers  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $0 \leq k \leq n$

$$E_{n,k} = X^k(1 - X)^{n-k}$$

(Polynômes de BERNSTEIN : ils ont été introduits par le mathématicien Bernstein au début du 20<sup>ème</sup> siècle , par des arguments probabilistes : en effet dans la loi binomiale  $B(n, p)$  qui compte le nombre de succès dans une suite de  $n$  épreuves indépendantes ,où  $p$  est la probabilité d'un succès sur une épreuve, la probabilité d'obtenir  $k$  succès est :

$$\binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$$

1. Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_{n,k}$ ,  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} E_{n,k}$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} E_{n,k}$

2. En déduire la relation  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 E_{n,k} = nX(1 - X)$

Soit  $f \in C^0([0, 1], E)$  et  $\varepsilon > 0$ . On se propose de déterminer une fonction polynôme  $P$  à coefficients dans  $E$

$$\overrightarrow{P}(x) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} x^k \overrightarrow{a}_k, \text{ et } \overrightarrow{a}_k \in E$$

telle que  $N_\infty(f - P) < \varepsilon$

3. Soit  $\alpha > 0$  et  $t \in [0, 1]$ . On note

$$A_n = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left| \frac{k}{n} - t \right| \geq \alpha \right\}$$

Montrer à l'aide de 2° que  $\sum_{k \in A_n} \binom{n}{k} t^k(1 - t)^{n-k} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$

4. Démontrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1], |x - y| \leq \alpha \Rightarrow \left\| \overrightarrow{f}(x) - \overrightarrow{f}(y) \right\| \leq \varepsilon$$

5. On pose  $\overrightarrow{P}_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k(1 - t)^{n-k} \overrightarrow{f}\left(\frac{k}{n}\right)$ . Montrer que  $\forall t \in [0, 1]$

$$\left\| \overrightarrow{P}_n(t) - \overrightarrow{f}(t) \right\| \leq \frac{N_\infty(f)}{2\alpha^2 n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

on appelle polynôme d'interpolation de Bernstein de  $f$  le polynôme  $\overrightarrow{P}_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k(1 - t)^{n-k} \overrightarrow{f}\left(\frac{k}{n}\right)$ .

Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_\infty(\overrightarrow{P}_n - \overrightarrow{f})$

**THEOREME DE STONE WEIERSTRASS TRIGONOMETRIQUE**  
(démonstration par les sommes Fejer CCP 2004)

On sait que pour toute fonction continue sur un intervalle compact  $[a, b]$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction polynômiale  $P$  telle que  $\sup \{|f(x) - P(x)|, x \in [a, b]\} = N_\infty(f - P) < \varepsilon$ . Ceci revient à dire qu'il existe une suite de fonctions polynômiales  $P_n$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_\infty(P_n - f) = 0$ , ou encore :  $f$  est la limite uniforme (ie: pour

la norme  $N_\infty$ ) d'une suite de fonctions polynômiales. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . On note  $e_n : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \rightarrow & e^{inx} \end{matrix}$  qui est donc une application  $2\pi$  périodique. On appelle polynôme trigonométrique toute application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme  $P = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e_k$ . Le nom de polynôme vient du fait que  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikt} = \sum_{k=-N}^N \alpha_k X^k$  ou l'on a posé  $X = e^{it}$

Le théorème de Stone Wierstass pour les fonctions périodiques s'énonce ainsi:

Pour toute fonction continue  $2\pi$  périodique  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction polynômiale trigonométrique  $P$  telle que  $\sup \{|f(x) - P(x)|, x \in [a, b]\} = N_\infty(f - P) < \varepsilon$ .

Dans ce qui suit  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , est une fonction  $2\pi$  périodique.

1. Justifier les formules 
$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\cos(\frac{mt}{2}) \sin(\frac{(m+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(kt) = \frac{\sin(\frac{mt}{2}) \sin(\frac{(m+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

2. Justifier l'existence de  $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ . De même soit  $\varepsilon > 0$ , justifier l'existence de  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que pour tout couple de réels  $(x, y)$  tels que  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ ,  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

3. pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

- préciser  $c_n(f)$  lorsque  $f$  est la fonction constante égale à 1

- Montrer que 
$$\sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} dx$$

On pose  $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$ , et, pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_m(f) = \frac{1}{m+1} \sum_{N=0}^m S_N(f)$

Montrer que pour  $t \in \mathbb{R}$  
$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) \frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} dx$$

4. En déduire, si  $\varepsilon > 0$  et  $t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\sigma_m(f)(t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi(m+1)} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(t)) \frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} dx \right| \\ &\leq \varepsilon/2 + \frac{1}{2\pi(m+1)} \int_{\delta_\varepsilon \leq |x| \leq \pi} 2M \frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} dx \\ &\leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{(m+1) \sin^2(\frac{\delta_\varepsilon}{2})} \end{aligned}$$

penser à vérifier que  $\sigma_m(1) = 1$

5. Conclure .

# Polynômes de BERNSTEIN

Sergei Natanovic BERNSTEIN est né en 1880 et est mort en 1968.

## 1) Définition.

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Pour  $n$  entier naturel non nul donné, le  $n$ -ième polynôme de BERNSTEIN associé à  $f$  est :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

## 2) L'identité $\sum_{k=0}^n C_n^k (k - nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$ .

a) On suppose dans ce paragraphe que :  $\forall x \in [0, 1], f(x) = 1$ .

Si, pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f(x) = 1$ , alors pour  $n$  entier naturel non nul donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = 1.$$

b) On suppose dans ce paragraphe que :  $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$ .

Si, pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f(x) = x$ , alors pour  $n$  entier naturel non nul donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}.$$

**1er calcul.** Pour  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} B_n(f) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= X \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-1)-(k-1)} = X \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l X^l (1-X)^{(n-1)-l} = X(X + (1-X))^{n-1} = X. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = X.$$

**2 ème calcul.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-Y)^{n-k} &= \frac{X}{n} \sum_{k=1}^n C_n^k k X^{k-1} (1-Y)^{n-k} \\ &= \frac{X}{n} \frac{d}{dX} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-Y)^{n-k} \right) = \frac{X}{n} \frac{d}{dX} ((X + 1 - Y)^n) = X(X + 1 - Y)^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-Y)^{n-k} = X(X+1-Y)^{n-1}.$$

En particulier, quand  $Y = X$ , on retrouve le résultat précédent .

c) On suppose dans ce paragraphe que :  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = x(x-1)$ .

Si, pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f(x) = x(x-1)$ , alors pour  $n$  entier naturel supérieur ou égal à 2 donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left( \frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k (1-X)^{n-k}.$$

**1er calcul.** Pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$k(n-k)C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!} = n(n-1)C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} B_n(f) &= -\frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-2)-(k-1)} \\ &= -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k X^k (1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X)(X+1-X)^{n-2} \\ &= -\frac{n-1}{n} X(1-X). \end{aligned}$$

L'égalité précédente restant vraie pour  $n = 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left( \frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X).$$

**2 ème calcul.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left( \frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-Y)^{n-k} &= -\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k (1-Y)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} X(1-Y) \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial}{\partial Y} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-Y)^{n-k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} X(1-Y) \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial}{\partial Y} ((X+1-Y)^n) \right) = -n(n-1) \frac{1}{n^2} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2} \\ &= -\frac{n-1}{n} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left( \frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-Y)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}.$$

En particulier, quand  $Y = X$ , on retrouve le résultat précédent .

d) Calcul de  $\sum_{k=0}^n C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n C_n^k k^2 X^k (1-X)^{n-k} - 2nX \sum_{k=0}^n k C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k k(k-n) X^k (1-X)^{n-k} - n(2X-1) \sum_{k=0}^n k C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \\ &= n^2 \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left( \frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-X)^{n-k} - n^2 (2X-1) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \end{aligned}$$

et donc les résultats de a), b) et c)

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (k - nX)^2 X^k (1 - X)^{n-k} = n^2 \left( -\frac{n-1}{n} X(1-X) - (2X-1)X + X^2 \right) = n^2 \left( -\frac{1}{n} X^2 + \frac{1}{n} X \right) = nX(1-X).$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k (k - nX)^2 X^k (1 - X)^{n-k} = nX(1-X).$$

### 3) Convergence uniforme de la suite des polynômes de BERNSTEIN

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On va montrer que la suite  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

**a) Une majoration de  $|f(x) - B_n(f)(x)|$ .**

Soit  $x$  un réel de  $[0, 1]$  et  $n$  un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| f(x) \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \quad (\text{d'après 1)a}) \\ &= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

**b) Pourquoi l'expression précédente est-elle petite ?**

Tout d'abord,  $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$  est une expression bornée uniformément en  $x$ .

Ensuite, pour  $x$  donné et pour des  $k$  tels que  $\left| x - \frac{k}{n} \right|$  est petit,  $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$  est petit. Pour les  $k$  tels que  $\frac{k}{n}$  est assez éloigné de  $x$  et décrivant donc un sous-ensemble  $J$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$  est bornée uniformément en  $x$  et il n'y a qu'à espérer que  $\sum_{k \in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$  soit petit. Mais là, on dispose de

$$\sum_{k \in J} C_n^k \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \dots$$

**c) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.**

$f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et est donc d'une part bornée sur ce segment, et d'autre part uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Par suite, il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $|f(x)| \leq M$  et il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que  $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$ ,  $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

**d) Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $x$  un réel de  $[0, 1]$ .**

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ |x - \frac{k}{n}| < \alpha}}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \alpha}}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}| < \alpha}}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}| \geq \alpha}}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}| \geq \alpha}}^n C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \frac{x(1-x)}{n} \text{ (d'après 1)},
\end{aligned}$$

(dans la deuxième somme, l'inégalité  $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha$  s'écrit encore  $1 \leq \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2}$ ) et donc :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \frac{1/4}{n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2},$$

(si  $x \in [0, 1]$ ,  $x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ ). En résumé,  $\varepsilon > 0$  strictement positif ayant été donné, on a montré que :

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}.$$

Or,  $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}$  tend vers  $\frac{\varepsilon}{2}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par suite, il existe un entier naturel non nul  $n_0$  tel que tout entier naturel  $n \geq n_0$ ,  $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  et donc pour tout réel  $x \in [0, 1]$ ,  $|f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon$ .

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon,$$

et donc que

La suite  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  des polynômes de BERNSTEIN converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

#### 4) Le théorème de WEIRSTRASS.

D'après 2), toute fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est limite uniforme sur  $[0, 1]$  d'une suite de polynômes. Plus généralement, soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  et soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = f((b-a)x + a).$$

Comme la fonction  $x \mapsto (b-a)x + a$  est un homéomorphisme de  $[0, 1]$  sur  $[a, b]$  (de réciproque la fonction  $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$ ) et que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $g$  est continue sur  $[0, 1]$ . Il existe alors une suite de polynômes  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $g$  sur  $[0, 1]$ .

Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et  $x$  dans  $[a, b]$ , posons

$$P_n(x) = Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour  $x$  dans  $[0, 1]$  et  $n \geq n_0$ ,  $|g(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$ . Mais alors, pour  $n \geq n_0$  et  $x$  dans  $[a, b]$ ,

$$|f(x) - P_n(x)| = \left|g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon.$$

car  $\frac{x-a}{b-a}$  est dans  $[0, 1]$ .

On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

et donc la suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . D'où le :

Théorème de WEIRSTRASS. Toute fonction continue sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.

### 5) Peut-on généraliser à $\mathbb{R}$ ?

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes convergeant uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ . Nous allons montrer que  $f$  est nécessairement un polynôme.

D'après le critère de CAUCHY uniforme, il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0, p \geq n_0$  et  $x$  réel,

$$|P_n(x) - P_p(x)| \leq 1,$$

et en particulier pour  $n \geq n_0$  et  $x$  réel,

$$|P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 1.$$

Pour  $n \geq n_0$ , le polynôme  $P_n - P_{n_0}$  est borné sur  $\mathbb{R}$  et donc constant. Par suite,

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = P_{n_0}(x) + P_n(0) - P_{n_0}(0).$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$  à  $x$  fixé, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P_{n_0}(x) - P_{n_0}(0) + f(0).$$

On a montré que :

Si  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de polynômes convergeant uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ ,  $f$  est nécessairement un polynôme.

Ce résultat montre que les séries entières usuelles de rayons infini (de somme  $e^x$  ou  $\cos x \dots$ ) ne sont pas uniformément convergentes sur  $\mathbb{R}$ .