DS : Réduction (4h)

Problème 1 :

Partie 1 : Généralités

Dans cette partie $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $\left(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.
On considère $\chi_f(X)=\prod\limits_{k=1}^{p}\left(X-\lambda_k\right)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$.
Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k=\operatorname{Ker}\left(\left(f-\lambda_k \mathrm{id}_E\right)^{m_k}\right)$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f.

2. Montrer que $E=F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$.

3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x)=f(x)-\lambda_k x$.

- **a)** Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.
- **b)** Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k.
- **c)** Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k.

4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc est une matrice de $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme $A_k=\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$.

Partie 2 : Notion de Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p\left(x_0\right)=x_0$.
- $\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{p-1}\left(x_0\right)\right)$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux a deux.

On dit alors que la famille $\left(x_0, f\left(x_0\right) \ldots, f^{p-1}\left(x_0\right)\right)$ est un $p-$ cycle de f.

1. Soit $\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots ., f^{p-1}\left(x_0\right)\right)$ un $p-$ cycle de f.

- **a)** Montrer que $f^p=\mathrm{id}_E$.
- **b)** Montrer que l'ensemble $F_{x_0}=\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{k-1}\left(x_0\right)\right) \text{ est une famille libre}\right\}$ admet un maximum noté γ.
- **c)**
  - **i)** Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k\left(x_0\right) \in \operatorname{Vect}\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{\gamma-1}\left(x_0\right)\right)$.
  - **ii)** Montrer que $\gamma=n$.
  - **iii)** Déterminer le nombre des valeurs propres distinctes de f.

2. Soit $\mathcal{B}_{x_0} = \left(x_0, f(x_0) \ldots\ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ un n-cycle de f.

a) Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_0}.

c) On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{k} \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{\omega}$ désigne le conjugué de ω.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

3. Soit $M = (m_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M\,\overline{M}$.

b) En déduire que $M \in GL_n(C)$ et calculer M^{-1}

4. Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \ldots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que H est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de H et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Exercice 1 :

Q1. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q2. Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ?

Expliciter alors ces suites.

Problème 2 :

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E, alors :

$$\mathrm{Ker}[T(u)] = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q8. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.
On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \ldots + R_mQ_m = 1$.

Q9. On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
Démontrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E.
Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

Q10. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

(avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace propre caractéristique associé à λ_i.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$.

Q11. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\ p_1 \oplus \mathrm{Im}\ p_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\ p_m$.

Q12. Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \mathrm{Im}\ p_i$.

Exercice 2 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la matrice transposée de la matrice A.

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.

2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top BY$ pour un vecteur Y de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que l'on a : $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n$.

4. En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.

5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.

6. Factoriser P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

7. La matrice A est-elle inversible ?

8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.

9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.
Montrer que V est aussi vecteur propre de $A^\top$.

10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.
On appelle $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associés à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i \in [\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, 4]\!]^2, \quad L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

10.1. Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

10.2. Vérifier que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base $\mathcal{L}$.

11. Étude des puissances de A.

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base $\mathcal{L}$.

11.1.2. En déduire une expression de A^k.

11.2. Démontrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.
Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i \in [\![1,4]\!]}$.

FiN

Corrigé

Problème 1 : CNC 2024

Partie 1 : Généralités

1. Soit $1 \leq k \leq p$, on sait que $f \circ (f - \lambda_k)^{m_k} = (f - \lambda_k)^{m_k} \circ f$ donc $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$ est stable par f .

2. Les p polynômes $(\lambda_k - X)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux, on déduit par le théorème de décomposition des noyaux, que

$$\mathrm{Ker} \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k \mathrm{id}_E - f)^{m_k} = \mathrm{Ker}\left((\lambda_1 \mathrm{id}_E - f)^{m_1}\right) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\left((\lambda_p \mathrm{id}_E - f)^{m_p}\right)$$

et d'après le théorème de Cayley Hamilton on a $\mathrm{Ker} \prod\limits_{k=1}^{p} (\lambda_k \mathrm{id}_E - f)^{m_k} = \mathrm{Ker}(\chi_f(f)) = E$.

Ainsi on a $\boxed{E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p}$.

3. Pour tout entier $k \in [\![0, p]\!]$, posons $\varphi_k = f_{|F_k} - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k} \in \mathcal{L}(F_k)$, on a pour tout $x \in F_k, \varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.

a) Soit $k \in [\![0, p]\!]$, pour tout x dans F_k on a $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}(x) = 0$ donc $\varphi_k^{m_k} = 0$ et φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .

b) Remarquons que $\varphi_k = f_{|F_k} - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ et $(X - \lambda_k)^{m_k}$ est un polynôme annulateur de $f_{|F_k}$ donc $Sp(f_{|F_k}) = \{\lambda_k\}$,on en déduit que $\chi_{f_{|F_k}}(X) = (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$.
F_k est un sous espace stable par f donc $\chi_{f_{|F_k}} | \chi_f$, ce qui donne $\dim F_k \leq m_k$.
Le degré du polynôme caractéristique χ_f est égale à $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ et on a aussi $\dim F_1 + \dim F_2 + \ldots + \dim F_p = n$, si on suppose qu'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\dim F_i < m_i$ alors $\dim F_1 + \ldots + \dim F_p < m_1 + \cdots + m_p$ ce qui est absurde , ainsi pour tout k dans $[\![1, p]\!]$ on a $\boxed{\dim F_k = m_k}$.

c) Montrons que $\varphi_k^{m_k - 1} \neq 0$. Supposons par l'absurde que que $\varphi_k^{m_k - 1} = 0$ et considérons le polynôme

$$Q(X) = (X - \lambda_k)^{m_k - 1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i} = \frac{\chi_f(X)}{\lambda_k - X}$$

On a

$$Q(f) = (f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k - 1} \circ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right)$$

Les polynômes d'un même endomorphisme commutent , donc pour tout $x \in F_k$ on a

$$Q(f)(x) = \left[\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right) \right] \left(\varphi_k^{m_k - 1}(x) \right) = 0$$

et pour tout $x \in F_j$ avec $j \neq k$ on a

$$Q(f)(x) = \left[(f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k - 1} \circ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, \ i \neq j}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right) \right] \left(\varphi_j^{m_j}(x) \right) = 0$$

Comme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, on a alors pour tout $x \in E$ il existe $(x_1, ..., x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tels que $x = x_1 + ... + x_p$, donc $Q(f)(x) = Q(f)(x_1) + ... + Q(f)(x_p) = 0$.
Ainsi $Q(f) = 0$ avec Q de degré $n - 1$, $Q(f)$ est donc une combinaison linéaire non nulle de $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ ce qui est contraire à l'hypotèse stipulant que $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est une partie libre. Donc $\varphi_k^{m_k - 1} \neq 0$.
On en déduit que pour tout entier k dans $[\![1, p]\!]$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k.

4. Pour tout entier k dans $[\![1,p]\!]$, $\varphi_k \in \mathcal{L}(F_k)$ est nilpotente d'ordre $m_k = \dim F_k$, d'après la partie 2 la matrice de φ_k dans une base $\mathcal{B}_{e_k}$ de F_k est de la forme

$$Mat_{\mathcal{B}_{e_k}}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$$

comme $f_{|F_k} = \varphi_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ alors sa matrice dans la base $\mathcal{B}_{e_k}$ est de la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{e_1} \cup \mathcal{B}_{e_2} \cup ... \cup \mathcal{B}_{e_p}$ la base de E adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs de la forme $Mat_{\mathcal{B}}(f) = diag(\ A_1, A_2, ...A_p)$.

Partie 4: Cycles

1. Soit $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ un $p-$ cycle de f.

a) Pour tout entier k dans $[\![1,p-1]\!]$ on a $f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0)$, comme $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille génératrice de E alors $f^p(x) = x$ pour tout $x \in E$, ainsi $\boxed{f^p = \mathrm{id}_E}$.

b) E est de dimension n, par conséquent, une partie libre de E a au plus n éléments. De plus $x_0 \neq 0$ donc $1 \in F_{x_0}$. Ainsi F_{x_0} est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ donc elle admet un maximum noté γ.

c) i) Montrons par récurrence que $\forall k \geq \gamma \quad f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
• $\gamma + 1 \notin F_{x_0}$ donc $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0), f^{\gamma}(x_0))$ est liée, comme $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre alors $f^{\gamma}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
• Supposons que $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$, alors $f^{k+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^{\gamma}(x_0))$ et comme $f^{\gamma}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$ on a bien $f^{k+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
Finalement pour tout entier $k \geq \gamma$, $\boxed{,f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\right)}$.

ii) $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille génératrice de E et $\forall k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\right)$, donc

$$E = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)) = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

comme $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre alors c'est une base de E et $\dim E = n = \gamma$.

iii) D'après la question a) $f^p = \mathrm{id}_E$ avec $p = n = \gamma$, donc $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de f , par suite le polynôme minimal π_f divise $X^n - 1$.
Posons $\pi_f(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0$ avec $d \leq n$, on a alors $f^d(x_0) + a_{d-1}f^{d-1}(x_0) + ... + a_0 x_0 = 0$ donc la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^d(x_0))$ est liée, par suite $d + 1 \notin F_{x_0}$ et forcement $d + 1 > n$, ainsi $d = n$.
On sait que les valeurs propre de f sont exactement les racines de π_f , donc $Sp(f) = \left\{e^{2ik\pi}, k \in [\![1,n]\!]\right\}$ et f admet n valeurs propres distinctes .

a) Soit $\mathcal{B}_{x_0} = \left(x_0, f\left(x_0\right) \ldots \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ un n-cycle de f , ce qui signifie $\mathcal{B}_{x_0}$ est une famille génératrice de E de cardinal $n = \dim E$ donc elle constitue une base de E.

b) On a $f(f^{j-1}(x_0)) = \begin{cases} f^j(x_0) \text{ si } 1 \leq j \leq n-2 \\ x_0 \text{ si } j = n-1 \end{cases}$, ce qui donne

$$G = Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a $GU_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{nk} \\ \overline{\omega}^{k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \overline{\omega}^{k} U_k$. Donc U_k est un vecteur propre de G associé à la valeur propre $\overline{\omega}^{k}$.

2. Soit $M = (m_{k,\ell})_{1 \leq k,\ell \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,\ell} = \overline{\omega}^{k\ell}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,\ell})_{1 \leq k,\ell \leq n}$, où $\overline{m}_{k,\ell}$ est le conjugué de $m_{k,\ell}$.

a) Posons $M\overline{M} = (a_{k,\ell})_{1 \leq k,\ell \leq n}$. Pour tout $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ on a

$$\begin{aligned} a_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^{n} m_{k,j} \overline{m}_{j,\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^{kj} \omega^{j\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\omega^{\ell-k}\right)^j \end{aligned}$$

Si $\ell = k$ alors $a_{k,\ell} = n$ et si $\ell \neq k$ alors $a_{k,\ell} = \omega^{\ell-k} \dfrac{1 - \left(\omega^{\ell-k}\right)^n}{1 - \omega^{\ell-k}} = 0$ (car $\left(\omega^{\ell-k}\right)^n = \left(\omega^n\right)^{\ell-k} = 1$) .

On conclus que $\boxed{M\overline{M} = n\mathrm{I}_n}$.

b) Ainsi $M \in GL_n(C)$ et $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{M}}$.

3. Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$

a) Remarquons que $G^2 = Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f^2)$ et

$$Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de même pour tout $k \in [\![3, n-1]\!]$

$$G^k = Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f^k) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \quad\vdots \\ \leftarrow k \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ \leftarrow n \end{array}$$

Nous avons alors $H = b_0 I_0 + b_1 G + ... + b_{n-1} G^{n-1}$.
Comme G admet n valeurs propres distinctes alors elle est diagonalisable, elle s'écrit de la forme $H = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale et P matrice inversible, par suite $G^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi H est semblable à la matrice diagonale : $b_0 I_0 + b_1 D + ... + b_{n-1} D^{n-1}$. H est donc diagonalisable .

b) D'après la question 1) on a $D = diag(\overline{\omega}, \overline{\omega}^2, ..., \overline{\omega}^n)$, si on pose $Q(X) = b_0 + b_1 X + ... + b_{n-1} X^{n-1}$alors H est semblable à la matrice $Q(D) = diag\left(Q\left(\overline{\omega}\right), Q\left(\overline{\omega}^2\right), ..., Q\left(\overline{\omega}^n\right)\right)$, ce qui donne $Sp(H) = \left\{Q\left(\overline{\omega}\right), Q\left(\overline{\omega}^2\right), ..., Q\left(\overline{\omega}^n\right)\right\}$ et on a $(U_1, ..., U_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Exercice 1 : CCINP 2024

Q1. On peut commencer par le calcul du polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_2}}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 0 \\ X+2 & X-4 & X+2 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{lin. } C_1, C_3}{=} (X+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (X+2)^2(X-1)$$

On constate que le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des valeurs propres de A est $\{-2, 1\}$; la matrice $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang égal à 1, donc d'après le théorème du rang le sous-espace propre associé à la valeur propre double -2 est de dimension égale à 2 ; l'autre valeur propre, 1, est simple. On peut donc conclure que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On calcule pour $\lambda \in \{-2, 1\}$ le sous-espace propre $\mathrm{Sep}_\lambda(A)$ associé à la valeur propre λ, et on exprime chacun comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre :

$$\mathrm{Sep}_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) ; \qquad \mathrm{Sep}_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ est inversible et ses colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de la matrice A, donc $P^{-1}AP = D$ où $D = \mathrm{Diag}(-2, -2, 1)$.

Q2. D'après la relation de récurrence de l'énoncé, la suite matricielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n \qquad \text{donc} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+1} = P^{-1}(AX_n) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X_n) = DY_n$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;\; Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} (-2)^n \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}}$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites coordonnées de la suite vectorielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, elles convergent simultanément si et seulement si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de sa topologie naturelle.

De même, les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; on vient d'établir que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc convergente, et que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raison -2, de valeur absolue strictement plus grande que 1, donc ces deux suites convergent si et seulement si $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Les endomorphismes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux matrices P et P^{-1} sont des applications continues pour la topologie naturelle de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, réciproques l'une de l'autre, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n = PY_n$ et $Y_n = P^{-1}X_n$; par conséquent, les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

On conclut que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \;\; Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} \;\; \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et dans ce cas la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (PY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante aussi :

> Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si elles sont constantes et $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1).

Problème 2 : CCINP 2023

6°. $A=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

$$\Pi_1\cdot\Pi_2=0;\quad \Pi_1+5\Pi_2=A;\quad \Pi_1+\Pi_2=I_2$$
$$\Pi_1^2=\Pi_1;\quad \Pi_2^2=\Pi_2.$$

Remarque : $\forall q\in\mathbb{N};\qquad A^q=\Pi_1+5^q\Pi_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5^q+1&5^q-1\\5^q-1&5^q+1\end{pmatrix}.$

7°.

$$Q(u)\circ P(u)=(PQ)(u),\ \text{Soit } x\in E:$$
$$\begin{aligned}x\in\operatorname{Ker}P(u)&\Longrightarrow P(u)(x)=0\\&\Longrightarrow Q(u)\circ P(u)(u)=0\\&\Longrightarrow (PQ)(u)(x)=0\\&\Longrightarrow x\in\ker(PQ)(u).\end{aligned}$$

Donc $\ker P(u)\subset\ker(PQ)(u)$ De même $\operatorname{Ker}Q(u)\subset\ker(PQ)(u)$.
Donc $\operatorname{Ker}P(u)+\ker Q(u)\subset\ker(PQ)(u)$.

$$P\wedge Q=1\Longrightarrow\exists U,V\in\mathbb{C}[X]/U\cdot P+V\cdot Q=1$$

alors $\boxed{\forall x\in E,\ x=U(u)\circ P(u)(x)+V(u)\circ Q(u)(x)=y+z}$
Si $x\in\operatorname{Ker}(PQ)(u)$ alors $y\in\operatorname{Ker}Q(u)$ et $z\in\operatorname{Ker}P(u)$ donc $\operatorname{Ker}(PQ)(u)\subset\operatorname{Ker}P(u)+\operatorname{Ker}Q(u)$.
Par conséquent $\operatorname{Ker}(PQ)(u)=\operatorname{Ker}P(u)+\operatorname{Ker}Q(u)$.
de plus si $x\in\operatorname{Ker}P(u)\cap\operatorname{Ker}Q(u)$, alors $x=0$ d'après l'égalité encadré précédente :
donc $\operatorname{Ker}(PQ)(u)=\operatorname{Ker}P(u)\oplus\operatorname{Ker}Q(u)$

8°. $\Pi_u=P_1^{k_1}P_2^{k_2}, Q_1=P_2^{k_2}: Q_2=P_1^{k_2}$
$P_1\wedge P_2=1\Longrightarrow P_1^{k_1}\wedge P_2^{k_2}=1$
Donc $Q_1\wedge Q_2=1$
$\exists R_1,R_2\in\mathbb{C}[X]/R_1Q_1+R_2Q_2=1.$

$\mathbf{9^o}$. $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ supposons que : $i \neq j$, alors

$$p_i \circ p_j = (R_i R_j)(u) \circ (Q_i \cdot Q_j)(u)$$

or $\left(Q_i Q_j\right) = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}} \cdot \dfrac{\pi_u}{P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i} P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \prod_{\substack{\ell \neq i \\ \ell \neq j}} P_\ell^{K_\ell}$ donc $\left(Q_i Q_j\right)(u) = 0$, alors $p_i \circ p_j = 0$.

et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} p_i &= \sum_{i=1}^{m} (R_i Q_i)(u) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} R_i Q_i\right)(u) \\
&= 1(u) \\
&= id_E
\end{aligned}$$

pour j fixé :

$$\begin{aligned}
p_j &= p_j \circ id_E \\
&= p_j \circ \sum_{i=1}^{m} p_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_j \circ p_i \\
&= p_j^2
\end{aligned}$$

donc p_j est 1 projecteur :

$\mathbf{10^o}$. les λ_i sont $\neq 2$ à 2, alors les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux 2 à 2 , par application du lemme des noyaux et de cayley-Hamilton.

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant m} N_i &= \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant m} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i} \\
&= \operatorname{Ker} \prod_{i=1}^{m} \left(u - \lambda_i id_E\right)^{\alpha_i} \\
&= \operatorname{Ker} X_u(u) \\
&= \operatorname{Ker} \theta \\
&= E
\end{aligned}$$

$\mathbf{11^o}$. Soit $x \in E$ d'après Q9 ; $x = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)$ donc $E \subset \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$, alors l'égalité, et si $y_i \in Im(p_i) = \ker\left(p_i - id_E\right) / \sum_{i=1}^{m} y_i = 0$ alors $y_i = p_i\left(y_i\right)$.

Soit j fixé, alors $0 = \sum_{i=1}^{m} p_j \circ p_i\left(y_i\right) = p_j\left(y_j\right) = y_j$

Donc $E = \bigoplus_{i=1}^{m} Im(p_i)$.

$\mathbf{12^o}$. Pour i fixé et $y_i \in Im(p_i)$ donc $y_i = p_i\left(y_i\right)$ alors $y_i = (Q_i R_i)(u)$, par conséquent

$$\begin{aligned}
(u - \lambda_i id)^{\alpha_1}\left(y_i\right) &= \left(P_i^{\alpha_i} Q_i R_i\right)(u) \\
&= (\pi_u \cdot R_i)(u) \\
&= \pi_u(u) \circ R_i(u) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $y_i \in Ker\,(u - \lambda_i \lambda)^{\alpha_i} = N_i$.

Donc

$$Im(p_i) \subset N_i$$

Si $\exists i \quad Im(p_i) \subsetneq N_i$, alors $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant m} \operatorname{Im}(p_i) \subsetneq \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant m} N_i = E$, absurde

donc $\forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad \operatorname{Im} p_i = N_i$

Exercice 2 : e3a 2024

1. On a
$$B = (3A^2 - A - I_n)A = A^\top A$$
donc $B^\top = (A^\top A)^\top = A^\top A = B$ de sorte que
$$\boxed{B \text{ est symétrique réelle.}}$$

2. La matrice B est symétrique réelle et, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, on a
$$Y^\top BY = Y^\top A^\top AY = (AY)^\top AY = \|AY\|_2^2 \geq 0$$
donc la matrice A est symétrique positive. Par caractérisation spectrale des matrices positives, on a :
$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+.}$$

3. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)^\top = (A^\top)^k$ donc, en transposant l'identité $A^\top = 3A^2 - A - I_n$, il vient :
$$\boxed{A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n.}$$

4. En remplaçant $A^\top$ par $3A^2 - A - I_n$ dans l'identité précédente, il vient :
$$A = 27A^4 - 18A^3 - 18A^2 + 7A + 3I_n$$
donc $27X^4 - 18X^3 - 18X^2 + 6X + 3$ annule A et, en divisant par 3, $9X^4 - 6X^3 - 6X^2 + 2X + 1$ annule A. On vérifie alors par simplement développement que ce dernier polynôme est égal à $(3X^2 - X - 1)^2 - X^2$. Ainsi,
$$\boxed{P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2 \text{ annule } A.}$$

5. Si P annule A, alors P annule $A^\top$. Puisque son coefficient dominant est égal à 9, on a :
$$\boxed{\frac{1}{9}P \text{ est un polynôme annulateur unitaire de } A^\top.}$$

6. En reconnaissant une identité remarquable, on a :
$$P(X) = (3X^2 - 2X - 1)(3X^2 - 1)$$
donc
$$\boxed{P(X) = 9(X-1)\left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).}$$

7. Puisque P annule A, les valeurs propres de A sont parmi les racines de P. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{1, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de A donc :

$$\boxed{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

8. P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

Par ailleurs, comme observé à la question précédente :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{1, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.}$$

9. On a

$$A^\top V = (3A^2 - A - I_n)V = 3A^2V - AV - I_nV = 3\lambda^2 V - \lambda V - V = (3\lambda^2 - \lambda - 1)V$$

et V est non nul car c'est un vecteur propre de A donc

$$\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } A^\top.}$$

10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.

10.1. On a

$$L_1(X) = \frac{(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}.$$

En remplaçant les α_i par leurs valeurs et en simplifiant, il vient :

$$\boxed{L_1(X) = \frac{9}{8}\left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).}$$

10.2. Soient c_1, c_2, c_3, c_3 des réels tels que $\sum_{i=1}^{4} c_i L_i = 0$. Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, en évaluant cette identité en α_i, on trouve $c_i = 0$. Ainsi la famille (L_1, L_2, L_3, L_4) est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est un espace de dimension 4. On a donc :

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$$

10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Posons $T(X) = \sum_{i=1}^{4} R(\alpha_i)L_i(X)$. Alors $T(\alpha_i) = R(\alpha_i)$ pour tout $i \in [\![0,4]\!]$ donc $R - T$ admet quatre racines distinctes ; c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 donc $R - T = 0$. Ainsi,

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{4} R(\alpha_i)L_i(X).}$$

11.

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. La division euclidienne de X^k par le polynôme P s'écrit

$$X^k = PQ + R$$

avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $R \in \mathbb{R}_3[X]$.
En évaluant cette égalité en les α_i, il vient :

$$\forall i \in [\![1,4]\!], \quad R(\alpha_i) = \alpha_i^k$$

donc, d'après **10.3**, on a :

$$\boxed{R(X) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(X).}$$

11.1.2. Puisque P est annulateur de A, en évaluant l'identité $X^k = PQ + R$ en A, il vient :

$$\boxed{A^k = R(A) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(A).}$$

11.2. Puisque $\alpha_1 = 1$ et $|\alpha_i| < 1$ pour $i \in [\![2,4]\!]$, on a

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} A^k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(A) = L_1(A).}$$

Montrons que la limite est une matrice de projection. Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_p)P^{-1}$$

où $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Alors

$$A^k = P\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k)P^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} P\underbrace{\mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{=D}P^{-1}.$$

On a $D^2 = D$ donc $\lim_{k\to+\infty} A_k$ est une matrice de projection.