

Contrôle (2 heures)

Polynômes et applications linéaires

Mini Problème 1 : Lemme de Schur

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieur à 2, on pose $\dim E = n$. Soit $u \in L(E)$.

1. On suppose dans cette question que $\forall x \in E$, la famille $\{x, u(x)\}$ est liée.
 - 1.1. Montrer que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{R}$, tel que $u(x) = \lambda_x \cdot x$
Indication : distinguer les cas $x = 0_E$ et $x \neq 0_E$
 - 1.2. Soit $\{x, y\}$ une famille liée dans E , montrer alors que $\lambda_x = \lambda_y$.
 - 1.3. Soit $\{x, y\}$ une famille libre dans E , montrer alors que $\lambda_x = \lambda_y$.
Indication : utiliser la relation $u(x+y) = u(x) + u(y)$.
 - 1.4. Conclure que u est une homothétie, c-à-d : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $u(x) = \lambda \cdot x, \forall x \in E$.
2. On suppose dans cette question que $u \circ v = v \circ u, \forall v \in L(E)$ et que u n'est pas une homothétie.
 - 2.1. Justifier que $\exists x \in E$, tel que la famille $\{x, u(x)\}$ est libre.
 - 2.2. On pose $e_1 = x, e_2 = f(x)$. En déduire qu'on peut trouver une base de E de la forme $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. On pose alors $F = \text{Vect}\{e_1\}$ et $G = \text{Vect}\{e_2, \dots, e_n\}$
 - 2.3. Montrer que $E = F \oplus G$
 - 2.4. On considère v la projection sur F parallèlement à G . Autrement dit $\text{Im}(v) = F$ et $\ker(v) = G$. Calculer $v \circ u(e_1)$ et $u \circ v(e_1)$
 - 2.5. En déduire une contradiction, puis conclure
3. Complétez ce théorème (dit lemme de Schur) :

Si E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieur à 2.

Si $u \in L(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u, \forall v \in L(E)$, alors

Mini Problème 2 : Opérateur des différences finies

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

- 1 Montrer que Δ est linéaire.
- 2 Calculer $\Delta(1)$, puis $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- 3 En déduire $\deg(\Delta(X^k))$ et $\text{cd}(\Delta(X^k))$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- 4 En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, on $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
Exprimer alors $\text{cd}(\Delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$
- 5 En déduire alors que Δ définit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- 6 Dorénavant, $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ est définie par $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
 - 6.1 Montrer que tout polynôme périodique est constant
 - 6.2 En déduire que $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = \text{cte}\}$
 - 6.3 En déduire que $\dim(\text{Im}(\Delta)) = n$.
 - 6.4 En déduire que $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - 6.5 On rappelle $\Delta^k = \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (k fois pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et que $\Delta^0 = \text{id}$).
Montrer que $\deg(\Delta^k(P)) = \deg(P) - k$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $0 \leq k \leq n$.
 - 6.6 En déduire que $\Delta^{n+1}(P) = 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
 - 6.7 Montrer que $\Delta^n(X^n) \neq 0$.
 - 6.8 Que peut-on dire à propos de Δ

Corrigé

Mini Problème 1 : Lemme de Schur

1

1.1 Pour $x=0_E$, prendre $\lambda_x=0$

Pour $x \neq 0_E$, si $u(x)=\alpha.x$, prendre $\lambda_x= \alpha$

Pour $x \neq 0_E$, si $x=\alpha.u(x)$, comme $x \neq 0_E$ alors $\alpha \neq 0$ prendre $\lambda_x=1/\alpha$

1.2 $\{x,y\}$ une famille liée dans E , donc $y= \alpha.x$ (par exemple), donc $u(y)= \alpha.u(x)$, donc $\lambda_y.y= \alpha.\lambda_x.x = \lambda_x.y$, donc $\lambda_x= \lambda_y$ si $y \neq 0_E$

1.3 On a $u(x+y)=u(x)+u(y)$, donc $\lambda_{x+y}.(x+y)= \lambda_x.x + \lambda_y.y$, donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x).x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y).y=0_E$, or $\{x,y\}$ est libre dans E , donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, en particulier $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$

1.4 Selon les questions précédentes, λ_x ne dépend pas de x , on pose alors $\lambda= \lambda_x$ donc $u(x)= \lambda.x, \forall x \in E$.

2

2.1 Selon les questions précédentes, on a $\forall x \in E$, la famille $\{x, u(x)\}$ est liée $\Rightarrow u$ est une homothétie, donc par contraposée, on obtient u n'est pas une homothétie $\Rightarrow \exists x \in E$, tel que la famille $\{x, u(x)\}$ est libre.

2.2 Découle immédiatement du théorème de la base incomplète

2.3 $x \in F \cap G \Rightarrow x= \lambda_1.e_1$ et $x= \lambda_2.e_2 + \dots + \lambda_n.e_n$, donc $\lambda_1.e_1 - \lambda_2.e_2 - \dots - \lambda_n.e_n = 0_E$, or $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E , donc libre, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ en particulier $x=0_E$, donc $F \cap G = \{0_E\}$, d'autre part $\dim(E)=n$, $\dim F=1$ et $\dim G=n-1$, donc $\dim E= \dim F + \dim G$, donc $E=F \oplus G$

2.4 $v(u(e_1))=v(e_2)=0_E$, car $e_2 \in G=\ker(v)$ et $u(v(e_1))=u(e_1)=e_2$, puisque $e_1 \in F=\text{Im}(v) \Rightarrow v(e_1)=e_1$.

2.5 On a trouvé $v(u(e_1))= 0_E \neq u(v(e_1))= e_2$, ce qui contredit $u \circ v = v \circ u$

3 Complétez ce théorème (dit lemme de Schur) :

Si E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieur à 2.

Si $u \in L(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u, \forall v \in L(E)$, alors u est une homothétie, c-à-d : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $u(x)= \lambda.x, \forall x \in E$.

Mini Problème 2 : Opérateur des différences finies

- 1 Il suffit de montrer rigoureusement que $\Delta(P + \lambda Q) = \Delta(P) + \lambda \Delta(Q)$, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - 2 Si $P(X) = 1$, alors $P(X+1) = 1$, donc $\Delta(1) = 0$, puis $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = kX^{k-1} + \dots + 1$, selon la formule du binôme de Newton.
 - 3 Selon la question précédente, on a : $\deg(\Delta(X^k)) = k-1$ et $\text{cd}(X^k) = k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 - 4 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, posons $\deg(P) = n$, donc $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$, donc par linéarité, on a $\Delta(P)(X) = a_n \Delta(X^n) + \dots + a_0 \Delta(1)$, or $\deg \Delta(1) < \dots < \deg \Delta(X^n)$, donc $\deg(\Delta(P)) = \deg \Delta(X^n) = n-1 = \deg(P) - 1$. Avec $\text{cd}(\Delta(P))$ et $\text{cd}(P) = \text{cd}(a_n \Delta(X^n)) = a_n \text{cd}(\Delta(X^n)) = na_n$.
 - 5 Δ est déjà linéaire, d'autre part $P \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow \deg(P) \leq n \Rightarrow \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \leq n-1 < n \Rightarrow \deg(P) - 1 \Rightarrow \Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. CQFD
- 6
- 6.1 Déjà vu en Td (classique)
 - 6.2 $P \in \ker(\Delta) \Rightarrow \Delta(P) = 0 \Rightarrow P(X+1) = P(X) \Rightarrow P = \text{cte}$, car 1 périodique.
 - 6.3 Découle immédiatement de la formule du rang, appliqué à $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, donc $\dim \text{Im}(\Delta) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker(\Delta) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker(\mathbb{R}_0[X]) = n+1-1 = n$.
 - 6.4 On a $\text{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'après la question 4, et selon la question précédente, on a $\dim \text{Im}(\Delta) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où égalité.
 - 6.5 À rédiger soigneusement par récurrence $0 \leq k \leq n$, en utilisant la relation $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
 - 6.6 car $\deg \Delta^{n+1}(P) = \deg(P) - n - 1 < 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\Delta^{n+1}(P) = 0$
 - 6.7 On a $\deg \Delta^n(X^n) = \deg(X^n) - n = 0$, donc $\Delta^n(X^n) = \text{cte} \neq 0$.
 - 6.8 Δ est nilpotent d'indice n .