

Devoir Maison : Réduction

Crochet de Lie (CNC 2000)

Définitions et notations

On considère un espace vectoriel E , de dimension finie $n \geq 2$, sur le corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv , $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id .

Si u est un endomorphisme de E , on note $\text{Tr}(u)$ la trace de u et $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u . \mathcal{T} désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u , on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ .

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on pose $u^0 = Id$ et si $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).

On définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u, v) &\longmapsto [u, v] \end{aligned}$$

et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto [u, v] \end{aligned}$$

Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{K} , à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m . Enfin, $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n de terme général $\alpha_i \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kroneker (on rappelle que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

1^{ère} Partie

A- Quelques propriétés de Φ_u

1. Montrer que \mathcal{T} est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie.

- (a) Montrer que $\text{Vect}(\{Id, u, \dots, u^{n-1}\})$ est inclus dans $\text{Ker } \Phi_u$ et que $\dim(\text{Ker } \Phi_u) \geq 2$.
- (b) Montrer que si $v \in \text{Ker } \Phi_u$, alors $v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

4. Montrer que l'image de Φ est incluse dans \mathcal{T} et que pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Im } \Phi_u \subset \mathcal{T}$. Existe-t-il $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[u, v] = \text{Id}$? Peut-on avoir $\text{Im } \Phi_u = \mathcal{T}$?
5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
 - (a) Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
 - (b) En déduire que $\text{Ker } \Phi_u = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si u est une homothétie.
6. (a) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$; montrer par récurrence sur k que $(\Phi_u)^k(v) = \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p u^{k-p} v u^p$.
 (b) En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

B- Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

1. u peut-il être une homothétie ?
2. Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.
3. En déduire l'existence d'une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t X \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

où $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

4. On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U, V) \in (\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}))^2$
 - (a) Montrer qu'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.
 - (b) On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^t R \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$; établir l'équivalence :

$$A = U'V' - V'U' \iff [{}^t X = -{}^t R(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S].$$

5. Montrer alors par récurrence sur n que l'image de Φ est égale à \mathcal{T} .

C- Détermination de $\text{Tr}(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E . Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$$

1. Rappeler pourquoi $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.
2. Calculer, pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, 2, \dots, n\}^4$, le produit $u_{i,j} u_{k,l}$ et montrer que l'on a :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k} u_{i,k}.$$

3. En déduire $\text{Tr}(\Phi_u)$.

2^{ème} Partie

A- Cas où u est diagonalisable

Dans cette question on suppose que u est diagonalisable.

On pose $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u .

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Pour simplifier les notations dans cette question, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Montrer que

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 : \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j)u_{i,j}.$$

(b) En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\text{Sp}(\Phi_u)$.

2. Montrer que

$$\text{Ker } \Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)\}.$$

3. En déduire que $\text{Ker } \Phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.
Quel est le rang de Φ_u ?

4. On suppose en plus que u a n **valeurs propres distinctes**.

Quel est la dimension de $\text{Ker } \Phi_u$? Quel est le polynôme minimal de u ?

En déduire que $\text{Ker } \Phi_u = \text{Vect}(Id, u, \dots, u^{n-1})$.

B- Cas où $\dim E=2$

Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie, $\dim E=2$.

1. Montrer que $\text{Ker } \Phi_u = \text{Vect}(Id, u)$ (on pourra utiliser une base de E de la forme $(e, u(e))$ dont on justifiera l'existence).
2. Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $X^2(X^2 + \beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.
3. Si $\beta = 0$, l'endomorphisme Φ_u est-il diagonalisable ?
4. On suppose $\beta \neq 0$; étudier la diagonalisabilité de Φ_u selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
5. On suppose Φ_u diagonalisable.

(a) Montrer que $\text{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul .

Dans la suite de la question, v (respectivement w) désigne un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre λ (respectivement $-\lambda$).

(b) L'endomorphisme v peut-il être inversible ? Calculer $\text{Tr}(v)$ puis v^2 .

(c) Détermination de $\text{Sp}(u)$:

- Pour quelles valeurs du vecteur e la famille $(e, v(e))$ est-elle une base de E ?
- Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que $\text{Sp}(u) = \{\frac{\text{Tr}(u)-\lambda}{2}, \frac{\text{Tr}(u)+\lambda}{2}\}$. Que peut-on alors dire de u ?

(d) Montrer que $E = \text{Ker } v \oplus \text{Ker } w$ puis en déduire que u est diagonalisable.

C- Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit (v_1, v_2, \dots, v_n) une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Soit enfin $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

1. Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de λ, β_i et $v_i(x)$.
2. Montrer que l'application $\Psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E, v \mapsto v(x)$ est linéaire surjective.
3. Montrer alors que u est diagonalisable.

3^{ème} Partie

Soit λ une valeur propre **non nulle** de Φ_u et v un vecteur propre associé ; on désigne par P_u le polynôme caractéristique de u .

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}, v(u - xId) = (u - (x + \lambda)Id)v$.
(b) Qu'en déduit-on sur P_u si $\det v \neq 0$.
(c) Montrer alors que l'endomorphisme v n'est pas inversible.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$; qu'en déduit-on si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$?
3. Conclure que v est un endomorphisme nilpotent.

Dans la suite on suppose que $\dim \text{Ker } v = 1$

4. (a) Montrer que pour tout $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{Im } v^p$ est stable par les endomorphismes u et v .
(b) Soit $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$; en considérant les endomorphismes v_1 et u_1 induits par v et u sur $\text{Im } v^p$, montrer que $\dim(\text{Im } v^p) = 1 + \dim(\text{Im } v^{p+1})$.
(c) Dédurre de ce qui précède que $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.
5. Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$; montrer que la famille $\mathcal{B} = (e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est une base de E et écrire la matrice de l'endomorphisme v dans cette base.
6. On pose $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) / wv - vw = \lambda v\}$.
(a) Montrer que \mathcal{A} contient un endomorphisme w_0 dont la matrice relativement à la base \mathcal{B} est $\text{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda)$.
(b) Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ dont on précisera la direction.
(c) Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de \mathcal{A} .
7. Quelle est alors la forme de la matrice dans la base \mathcal{B} de l'endomorphisme u ?
8. On suppose dans cette question que la matrice de u dans une base \mathcal{B}' de E est de la forme $\text{diag}(\alpha, \alpha + \lambda, \alpha + 2\lambda, \dots, \alpha + (n-1)\lambda)$; décrire par leur matrice dans la base \mathcal{B}' les éléments de l'espace $E_{\Phi_u}(\lambda)$; quelle est sa dimension ?

FIN DE L'ÉPREUVE

1^{ère} Partie.

A-Quelques propriétés de Φ_u .

- 1) $\mathcal{T} = \ker \text{tr}$ est un hyperplan car tr est une forme linéaire sur E , non nulle, vu que $\text{tr}(\text{id}_E) = n$.
- 2) Vérifier rapidement que :
 - $\Phi(u, v) = -\Phi(v, u)$, d'où l'antisymétrie.
 - $\Phi(u + \lambda v, w) = \Phi(u, w) + \lambda \Phi(u, w)$, d'où la linéarité à gauche, l'antisymétrie en plus implique la linéarité à droite, donc la bilinéarité.
- 3) a) $\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1}$ appartiennent à $\ker \Phi_u$ car commutent avec u , donc $\text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \ker \Phi_u$, d'autre part $\{\text{id}_E, u\}$ est libre dans $\ker \Phi_u$, car u n'est pas une homothétie, donc $\dim \ker \Phi_u \geq 2$.
 b) $v \in \ker \Phi_u \implies v$ commute avec u , donc les sous-espaces propres $E_u(\lambda)$ de u sont stables par v .
- 4) $\text{Im} \Phi \subset \mathcal{T}$ car $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$, et aussi $\text{Im} \Phi_u \subset \text{Im} \Phi \subset \mathcal{T}$.
 On ne peut pas avoir $[u, v] = \text{id}_E$, car $\text{tr}(\text{id}_E) = n \neq 0$ et $\text{tr}([u, v]) = 0$.
 On ne peut pas avoir $\text{Im} \Phi_u = \mathcal{T}$, car $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$, alors que $\dim \text{Im} \Phi_u = n^2 - \dim \ker \Phi_u \leq n^2 - 2$.
- 5) a) L'implication directe est évidente.
 Réciproquement, supposons $\{x, u(x)\}$ est liée, donc $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que : $u(x) = \lambda_x \cdot x$, pour montrer que u est une homothétie il suffit de montrer que λ_x ne dépend pas de x , autrement dit $\lambda_x = \lambda_y$.
 Soit $x, y \in E$ non nul.
 – 1^{er} cas : $\{x, y\}$ est liée, donc $y = \alpha x$, d'où $u(y) = \alpha u(x)$, ainsi $\lambda_y \cdot y = \alpha \lambda_x \cdot x = \lambda_x \cdot y$, d'où $\lambda_y = \lambda_x$.

– 2^{ème} cas $\{x, y\}$ est libre.

$$\begin{aligned} u(x+y) &= u(x) + u(y) \implies \lambda_{x+y} \cdot (x+y) = \lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y \\ &\implies (\lambda_{x+y} - \lambda_x) \cdot x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) \cdot y = 0_E \\ &\implies \lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y \end{aligned}$$

- 6) a) Pour $k = 0$, vrai car $(\Phi_u)^0(v) = v$.

Supposons vrai pour k , donc

$$\begin{aligned} (\Phi_u)^{k+1}(v) &= \Phi_u \circ (\Phi_u)^k(v) \\ &= \Phi_u \left(\sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} u^{k-p} v u^p \right) \\ &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} \Phi_u(u^{k-p} v u^p) \\ &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} u^{k+1-p} v u^p \\ &\quad - \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} u^{k-p} v u^{p+1} \\ &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} u^{k+1-p} v u^p \\ &\quad + \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^p \binom{p-1}{k} u^{k+1-p} v u^p \end{aligned}$$

On remplace p par $p-1$ dans la 2^{ème} somme

$$\begin{aligned} &= u^{k+1} v + \sum_{p=1}^k (-1)^p \left(\binom{p}{k} + \binom{p-1}{k} \right) u^{k+1-p} v u^p \\ &\quad + (-1)^{k+1} v u^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u^{k+1}v + \sum_{p=1}^k (-1)^p \binom{p}{k+1} k u^{k+1-p} v u^p \\
&+ (-1)^{k+1} v u^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{p}{k+1} k u^{k+1-p} v u^p
\end{aligned}$$

b) Supposons $u^k = 0$, dans ce cas

$$(\Phi_u)^{2k}(v) = \sum_{p=0}^{2k} (-1)^p \binom{p}{2k} k u^{2k-p} v u^p = 0, \text{ car } u^p = 0 \text{ si } p \geq k \text{ et } u^{2k-p} = 0 \text{ si } p \leq k.$$

Donc u nilpotent $\implies \Phi_u$ nilpotent.

B-Détermination de l'image de Φ .

- 1) Si $u = \lambda \text{id}_E$, alors $\text{tr}(u) = \lambda n = 0$, donc $\lambda = 0$, d'où $u = 0$, contradiction, donc u ne peut pas être une homothétie.
- 2) Comme u n'est pas une homothétie d'après I.A.5.a) $\exists e_1 \in E$ tel que : $\{e_1, u(e_1)\}$ soit libre.
- 3) Prendre $e_2 = u(e_1)$ puis utiliser le théorème de la base incomplète, car $\{e_1, e_2\}$ libre, ainsi, $u(e_1) = e_2$ ne peut pas s'exprimer en fonction de e_1 , d'où $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t X \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
- 4) a) Il suffit de prendre α qui n'est pas valeur propre de U .
b) Un calcul très simple à faire.
- 5) On a déjà vu que $\text{Im} \Phi \subset \mathcal{T}$ dans I.A.4), montrons l'autre inclusion réciproque par récurrence sur $n = \dim E$.

Pour $n = 1$, $\dim \mathcal{L}(E) = 1$, donc tous les endomorphismes sont proportionnels à id_E , donc des homothéties, d'où $\Phi = 0$, donc $\dim \text{Im} \Phi = 0 = \dim \mathcal{T}$, d'où l'égalité.

Supposons vrai pour $n - 1$, donc $\text{tr}(u) = \text{tr}(A) = \text{tr}(A_1) = 0$, appliquons l'hypothèse de récurrence pour l'endomorphisme canoniquement associé à A_1 , donc $A_1 = UV - VU$, d'où $A = U'V' - V'U'$,

avec $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^t R \\ S & V \end{pmatrix}$ où α, S, R vérifient la question précédente, choisis tels que $U - \alpha I_{n-1}$ inversible, $S = (U - \alpha I_{n-1})^{-1} Y$ et $R = -{}^t((U - \alpha I_{n-1})^{-1}) X$.

Soit u', v' les endomorphismes canoniquement associés à U' et V' , alors $u = u'v' - v'u' \in \text{Im} \Phi$.

C-Détermination de $\text{tr}(\Phi_u)$.

- 1) La famille $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est de cardinal $n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

En effet supposons $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$, donc $\forall 1 \leq k \leq n$, on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} u_{i,j}(e_k) = 0, \text{ d'où } \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} \delta_{j,k} e_i = 0, \text{ d'où } \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{i,k} e_i = 0, \text{ d'où } \lambda_{i,k} = 0, \forall 1 \leq i, k \leq n, \text{ car la famille } (e_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est libre.}$$

- 2) Pour tout $1 \leq p \leq n$, on a : $u_{i,j} u_{k,l}(e_p) = \delta_{l,p} u_{i,j}(e_k) = \delta_{l,p} \delta_{j,k} e_i = \delta_{j,k} u_{i,l}(e_p)$, d'où $u_{i,j} u_{k,l} = \delta_{j,k} u_{i,l}$ car ils coïncident sur la base $(e_p)_{1 \leq p \leq n}$.

On a $u = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} u_{k,l}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\Phi_u(u_{i,j}) &= u u_{i,j} - u_{i,j} u \\
&= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} u_{k,l} u_{i,j} - \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} u_{i,j} u_{k,l} \\
&= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_{l,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_{j,k} u_{i,l} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq l \leq n} a_{j,l} u_{i,l} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq k \leq n} a_{j,k} u_{i,k}
\end{aligned}$$

On remplace l par k dans la 2ème somme

- 3) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_u(u_{i,j}) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_{k,i} u_{k,j} + a_{i,i} u_{i,j} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} a_{j,k} u_{i,k} - a_{j,j} u_{i,j} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} a_{j,k} u_{i,k} + (a_{i,i} - a_{j,j}) u_{i,j}
\end{aligned}$$

Ainsi les termes diagonaux de la matrice de Φ_u dans la base $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, sont les $a_{i,i} - a_{j,j}$ tel que : $1 \leq i, j \leq n$, d'où $\text{tr}(\Phi_u) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,i} - a_{j,j}) =$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,i} - \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{j,j} = 0 \text{ car } i, j \text{ jouent des rôles symétriques.}$$

2^{ème} Partie.

A-Cas où u est diagonalisable.

1) a) $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$ est diagonale, d'après I.C.2),

$$\Phi_u(u_{i,j}) = a_{i,i}u_{i,j} - a_{j,j}u_{i,j} = (\mu_i - \mu_j)u_{i,j}.$$

b) D'après la question précédente, $\mu_i - \mu_j$ sont des valeurs propres, dont les vecteurs propres associés sont les $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ qui forment une base de $\mathcal{L}(E)$, ainsi Φ_u admet une base propre donc diagonalisable.

2) $v \in \ker \Phi_u \implies v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i), \forall 1 \leq i \leq p$, d'après I.A.3.a).

Inversement supposons $v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i), \forall 1 \leq i \leq p$, et montrons que $vu = uv$, il suffit alors de le montrer sur la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

En effet $e_i \in E_u(\mu_i) \implies v(e_i) \in E_u(\mu_i) \implies uv(e_i) = \mu_i v(e_i)$, or $vu(e_i) = v(\mu_i e_i) = \mu_i v(e_i)$, d'où l'égalité.

3) Posons $\Psi : \ker \Phi_u \longrightarrow \mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$
 $v \longmapsto (v|_{E_u(\lambda_1)}, \dots, v|_{E_u(\lambda_p)})$

Ψ est bien définie car les sous-espaces propres $E_u(\lambda_i)$ sont stables par tout $v \in \text{Ker} \Phi_u$ qui y induit un endomorphisme.

Ψ est linéaire, car $(v + \lambda w)|_{E_u(\lambda_i)} = v|_{E_u(\lambda_i)} + \lambda w|_{E_u(\lambda_i)}$, pour tous $v, w \in \text{Ker} \Phi_u$.

Ψ est injective, car $v \in \text{Ker} \Phi_u \implies v = 0$ sur $E_u(\lambda_i) \forall 1 \leq i \leq p$, donc

$$v = 0 \text{ sur } \bigoplus_{i=1}^p E_u(\lambda_i) = E \text{ car } u \text{ est diagonalisable.}$$

Enfin, Soit $(v_1, \dots, v_p) \in \mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$, cherchons $v \in \ker \Phi_u$ tel que : $\Psi(v) = (v_1, \dots, v_p)$, pour cela, tout $x \in E$ s'écrit de

façon unique sous la forme, $x = x_1 + \cdots + x_p$ tel que : $x_i \in E_u(\lambda_i)$, posons $v(x) = v_1(x_1) + \cdots + v_p(x_p)$ il est clair que $v|_{E_u(\lambda_i)} = v_i$ et donc $v(E_u(\lambda_i)) = v_i(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)$, d'où $v \in \ker \Phi_u$ et $\Psi(v) = (v_1, \dots, v_p)$. Donc Ψ est surjective.

Ainsi Ψ définit un isomorphisme de $\ker \Phi_u$ vers $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \dim(\ker \Phi_u) &= \dim(\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))) = \\ &= \sum_{i=1}^p \dim(\mathcal{L}(E_u(\lambda_i))) = \sum_{i=1}^p \dim(E_u(\lambda_i))^2 = \sum_{i=1}^p m_i^2, \text{ car } u \text{ est diagona-} \\ &\text{lisable, donc } \text{rg}(\text{Im} \Phi_u) = \dim(\text{Im} \Phi_u) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))) - \dim(\ker \Phi_u) = \\ &= (n^2)^2 - \sum_{i=1}^p m_i^2 \end{aligned}$$

4) Si u n'admet que des valeurs propres distinctes alors elles sont toutes simples, donc $m_i = 1, \forall 1 \leq i \leq n$, d'où $\dim(\ker \Phi_u) = n$.

$\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1} \in \ker \Phi_u$ car commutent avec u , donc $\text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \ker \Phi_u$.

D'autre part, supposons $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est liée, alors ils existeraient des scalaires, $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k = 0$, d'où

$P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur de u , non nul de degré inférieur à $n - 1$, impossible car $\deg \pi_u = n$ puisque u admet n valeurs propres.

Donc $\dim(\text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})) = n = \dim(\ker \Phi_u)$ et $\text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \ker \Phi_u$, d'où l'égalité.

B- Cas où $\dim E = 2$.

1) u n'est pas une homothétie, donc $\exists e \in E$ tel que : $\mathcal{B} = (e, u(e))$ libre dans E , d'après I.A.5.a), donc base de E car $\dim E = 2$.

Soit $v \in \ker \Phi_u$, donc $uv = vu$, montrons que $v \in \text{Vect}(\text{id}_E, u)$, c'est à dire $v = \lambda \text{id}_E + \mu u$

Soit $U = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ et $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrons alors que $V = \lambda I_n + \mu U$, il suffit de prendre $\lambda = a$ et $\mu = c$ en utilisant le fait que $UV = VU$.

Ainsi $\ker \Phi_u \subset \text{Vect}(\text{id}_E, u)$, l'autre inclusion est évidente car id_E et u commutent avec u .

- 2) $\chi_{\Phi|_{\ker \Phi_u}}$ divise χ_{Φ_u} , car $\ker \Phi_u$ stable par Φ_u , or $\dim \ker \Phi_u = 2$ et 0 est l'une valeur propre de $\Phi|_{\ker \Phi_u}$, donc $\chi_{\Phi|_{\ker \Phi_u}} = X^2$, d'où $\chi_{\Phi_u} = X^2(X^2 + \beta)$.
- 3) Si $\beta = 0$, alors $\chi_{\Phi_u} = X^4$, si de plus Φ_u est diagonalisable, alors $\pi_{\Phi_u} = X$, car ses racines simples, or $\pi_{\Phi_u}(\Phi_u) = 0$, d'où $\Phi_u = 0$, donc $\ker \Phi_u = \mathcal{L}(E)$, donc u est une homothétie, contradiction.
- 4) Supposons $\beta \neq 0$.
 - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $\lambda, -\lambda$ les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $X^2 + \beta = 0$, ce sont des racines simples de χ_{Φ_u} et 0 est une valeur propre double, dont l'espace propre associé est de dimension 2, donc Φ_u diagonalisable.
 - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\beta < 0$, pareil que le 1er cas.
 - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, dans ce cas χ_{Φ_u} n'est pas scindé dans \mathbb{R} , car admet des racines complexes, non réelles, donc Φ_u n'est pas diagonalisable.
- 5) a) Reprendre le raisonnement fait dans la question précédente.
 b) $\Phi_u(v) = \lambda v$, donc $uv - vu = \lambda v$, supposons v inversible, donc $u - vv^{-1}\lambda = \lambda id_E$, d'où $[uv^{-1}, \frac{v}{\lambda}] = id_E$, impossible car $id_E \notin \text{Im } \Phi$.

$$v = \frac{\lambda}{\gamma}(uv - vu), \text{ donc } \text{tr } v = \frac{\lambda}{\text{tr}(uv) - \text{tr}(vu)} = 0.$$

Puisque, $\dim E = 2$, alors $\chi_v = v^2 - \text{tr}(v)v + \det v$, or $\det v = 0$ car v n'est pas inversible et $\text{tr}(v) = 0$, d'où $\chi_v = v^2$, comme $\chi_v(v) = 0$, alors $v^2 = 0$.
- c) Détermination de $\text{Sp}(u)$.
 - $\mathcal{B} = (e, v(e))$ base de $E \iff (e, v(e))$ libre dans E

car $\dim E = 2$

$\iff v(e) \neq \lambda e$ tel que : $\lambda \in \text{Sp}(v)$

$\iff v(e) \neq 0_E$ car $\text{Sp}(v) = \{0\}$

puisque $v^2 = 0$

– Posons $u(e) = ae + bv(e)$, et donc $vu(e) = av(e)$ car $v^2 = 0$

$$\begin{aligned} uv - vu = \lambda v &\implies uv(e) = vu(e) + \lambda v(e) \\ &\implies uv(e) = (a + \lambda)v(e) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a + \lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi $\text{tr}(u) = 2a + \lambda$, d'où $a = \frac{\text{tr}(u) - \lambda}{2}$ et

$$\mathrm{Sp}(u) = \left\{ a = \frac{\mathrm{tr}(a) - \lambda}{2}, a + \lambda = \frac{\mathrm{tr}(a) + \lambda}{2} \right\}.$$

Donc u est diagonalisable car admet 2 valeurs propres distinctes, et $\dim E = 2$.

- d) v non inversible, donc $\ker v \neq \{0_E\}$, et $v \neq 0$, donc $\ker v \neq E$, d'où $\dim \ker v = 1$, de même $\dim \ker w = 1$
Supposons $\ker v \cap \ker w \neq \{0_E\}$, alors $\ker v = \ker w$, vu que $\dim \ker v = \dim \ker w = 1$.

Cas où Φ_u est diagonalisable.

- 1) $uv_i - v_iu = \beta v_i$, donc $uv_i(x) = v_iu(x) + \beta v_i(x) = (\lambda_i + \beta)v_i(x)$ car $u(x) = \lambda_i x$.
Donc $v_i(x)$ sont des vecteurs propres de u .
- 2) Il est clair que Ψ est linéaire.
Surjection : Soit $y \in E$.
 - Si $y = 0_E$, prendre $v = 0$.
 - Si $y \neq 0_E$, on complète x et y pour avoir deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' qui commencent par x et y , et soit v l'application linéaire qui transforme \mathcal{B} en \mathcal{B}' , donc $v(x) = y$.
- 3) (v_1, \dots, v_{n^2}) est une base de $\mathcal{L}(E)$, donc son image par Ψ est génératrice de $\text{Im}\Psi = E$ car Ψ est surjective, ainsi $(v_1(x), \dots, v_{n^2}(x))$ est une famille génératrice de E formée par des vecteurs propres de u , de la quelle on peut extraire une base de E , donc u est diagonalisable.

3^{ème} Partie.

- 1) a) Découle immédiatement de l'égalité $uv - vu = \lambda v$.

- b) Supposons $\det v \neq 0$, la question précédente implique que $\det(u - x \text{id}_E) = \det(u - (x + \lambda) \text{id}_E)$, donc $\chi_u(x) = \chi_u(x + \lambda), \forall x \in \mathbb{K}$.
Supposons χ_u n'est pas constant, soit $x \in \mathbb{C}$ racine de χ_u , alors $x + \lambda, x + 2\lambda, \dots$ sont des racines de χ_u qui est donc nul car admet une infinité de racines, ce qui est impossible, donc χ_u est constant.

- c) Si v est inversible, alors $\det v \neq 0$, donc χ_u est constant, d'où $\deg u = 0$, ce qui est impossible car $\dim E = \deg \chi_u$

2) Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$

Pour $k = 1$, c'est vrai car v vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre à la valeur propre λ .

Supposons vrai pour k , dans ce cas $\Phi_u(v^{k+1}) = uv^{k+1} - v^{k+1}u = (uv)v^k - v^{k+1}u = (vu + \lambda v)v^k - v^{k+1}u = v(uv^k - v^k u) + \lambda v^{k+1} = v\Phi_u(v^k) + \lambda v^{k+1} = (k+1)\lambda v^{k+1}$.

Si $v^p \neq 0$, alors c'est un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre $p\lambda$.

- 3) Si $v^p \neq 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$, alors Φ_u aurait une infinité de valeurs propres distinctes, les $p\lambda$, absurde, donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $v^p = 0$.

- 4) a) $\text{Im} v^p$ est stable par v , car v^p commute avec v .

D'autre part, soit $y = v^p(x) \in \text{Im} v^p$, on a $uv^p = v^p u + p\lambda v^p$, d'après III.2, donc $u(y) = uv^p(x) = v^p(u(x) + p\lambda x) \in \text{Im} v^p$, d'où $\text{Im} v^p$ est aussi stable par u .

- b) On a : $v_1 : \text{Im} v^p \longrightarrow \text{Im} v^p$ avec $\ker v_1 = \ker v \cap \text{Im} v^p \subset \ker v$,
 $x \longmapsto v(x)$

donc $\dim \ker v_1 \leq 1$ et $\text{Im} v_1 = v(\text{Im} v^p) = \text{Im} v^{p+1}$. D'après la formule du rang, on a : $\dim \text{Im} v^p = \dim \ker v_1 + \dim \text{Im} v^{p+1}$.

Supposons $\ker v_1 = \{0_E\}$, donc $v^{p+1}(x) = 0 \implies v^p(x) \in \ker v_1 \implies v^p(x) = 0$

- c) $\dim \ker v = 1 \implies \dim \text{Im} v = n - 1$
 $\implies \dim \text{Im} v^2 = \dim \text{Im} v - 1 = n - 2$
 \vdots
 $\implies \dim \text{Im} v^{n-1} = 1$
 $\implies \dim \text{Im} v^n = 0$

Donc $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.

- 5) $\text{card} \mathcal{B} = n = \dim E$, il suffit donc de montrer que \mathcal{B} est libre.

En effet : Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que : $\lambda_0 e + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$, on compose par u^{n-1} , donc $\lambda_0 u^{n-1}(e) = 0$, d'où $\lambda_0 = 0$, puis on compose par u^{n-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 6) a) Il suffit de définir w_0 sur la base \mathcal{B} , pour cela posons $w_0(v^k(e)) = \Phi_u(v^k)(e)$, d'après III.2, on a $w_0(v^k(e)) = k\lambda v^k(e)$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \text{Diag}(0, \lambda, \dots, (n-1)\lambda)$

- b) $\forall w \in \mathcal{A}$, on a $w - w_0 \in \ker \Phi_v$, d'où \mathcal{A} est un espace affine de direction $\ker \Phi_v$ et d'origine w_0 .

- c) Montrons que $(\text{id}_E, v, \dots, v^{n-1})$ base de $\ker \Phi_v$.

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que : $\lambda_0 \text{id}_E + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1} = 0$, on applique l'égalité à e , donc $\lambda_0 e + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$, or \mathcal{B} libre, donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, donc la famille est libre.

D'autre part, soit $w \in \ker \Phi_v$, donc commute avec v mais aussi avec v^k pour $0 \leq k \leq n-1$, or \mathcal{B} base de E , donc $w(e) = \lambda_0 e + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = P(v)(e)$, et $wv^k(e) = v^k w(e) = v^k P(v)(e) = P(v)(v^k(e))$, d'où $w = P(v)$ car égaux sur la base \mathcal{B} , donc notre famille est génératrice pour $\ker \Phi_v$, donc base et par suite sa dimension vaut n .

- 7) Posons $u(e) = \lambda_0 e + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = P(v)(e)$, on a $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$, d'où $uv^k = v^k u + k\lambda v^k$, d'où $uv^k(e) = v^k P(v)(e) + k\lambda v^k(e)$, or $v^n = 0$, donc $vP(v) = \lambda_0 v(e) + \dots + \lambda_{n-2} v^{n-1}(e)$, $v^2 P(v) = \lambda_0 v^2(e) + \dots + \lambda_{n-3} v^{n-1}(e)$, ..., $v^{n-1} P(v)(e) = \lambda_0 v^{n-1}(e)$,

$$\text{d'où } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_0 + \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & \dots \lambda_1 & \lambda_0 + (n-1)\lambda \end{pmatrix}$$

8) Posons $\mathcal{B}' = (e_0, \dots, e_{n-1})$, donc $u(e_k) = (\alpha + k\lambda)e_k = \alpha_k e_k$.

Soit $v \in E_{\Phi_u}(\lambda)$, donc $uv - vu = \lambda v$, posons $v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e_k$, donc

$$uv(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u(e_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_k e_k \text{ et } vu(e_0) = \alpha_0 v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_0 e_k, \text{ or}$$

$$\lambda v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \lambda e_k, \text{ d'où } \lambda_k \alpha_k - \lambda_k \alpha_0 = \lambda_k \lambda, \text{ donc } \lambda_k (\alpha_k - \alpha_0 - \lambda) = 0,$$

donc $(k-1)\lambda \lambda_k = 0$, d'où $\lambda_k = 0$ si $k \neq 1$, ainsi la 1ère colonne de la

matrice de u sera de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En adoptant le même raisonnement pour calculer $v(e_1)$, on trouve que la

2ème colonne est de la forme suivante $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$

Et ainsi de suite la forme finale de la matrice sera

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices forment un ev de dimension $n-1$.

Fin.