

Devoir Maison : Déterminants

Calcul du déterminant de Cauchy CNC 2019

On considère un entier $n \geq 2$ et deux suites finies $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m , associé aux familles $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$, est le nombre, noté Δ_m , égal au déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i, j \leq m}$.

2.1. On suppose qu'il existe $(i_1, i_2) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i_1 \neq i_2$, tel que $a_{i_1} = a_{i_2}$. Justifier que $\Delta_n = 0$.

On suppose désormais que les réels a_1, \dots, a_n sont deux à deux **distincts** et on considère la fraction rationnelle

$$R = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (X - b_j)}{\prod_{k=1}^n (X + a_k)}.$$

2.2. Justifier que les polynômes $\prod_{k=1}^{n-1} (X - b_k)$ et $\prod_{k=1}^n (X + a_k)$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux.

2.3. Décomposition en éléments simples de la fraction R

2.3.1. Préciser les pôles de la fraction rationnelle R et vérifier qu'ils sont tous simples.

2.3.2. En déduire que la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction R est de la forme $R = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X + a_k}$ en précisant les expressions des réels α_k en fonction des a_k et des b_k .

2.4. Application au calcul de Δ_n

2.4.1. Montrer que $\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$.

2.4.2. En déduire que $\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$.

2.4.3. Calculer Δ_2 puis montrer que, pour tout $n \geq 2$,
$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

2.1 Si $a_{i_1} = a_{i_2}$ avec $i_1 \neq i_2$, alors les deux lignes correspondantes dans Δ_n sont égales et donc $\Delta_n = 0$.

2.2 Les deux polynômes sont scindés, l'intersection de leurs ensembles des racines est vide, puisque $a_i \neq -b_j$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, donc ils sont premiers entre eux

2.3 Décomposition en élément simple de la fraction R

2.3.1 Les pôles de R sont les racines du polynôme $\prod_{k=1}^n (X + a_k)$, c'est-à-dire les $(-a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et comme elles sont distinctes, alors R admet des pôles simples.

2.3.2 Puisque R admet des pôles simples qui sont les $(-a_k)_{1 \leq k \leq n}$, et $\deg((X - b_1) \dots (X - b_{n-1})) < \deg((X + a_1) \dots (X + a_n))$, la partie entière de R est nulle. R admet donc effectivement une décomposition en éléments simples de la forme

$$R = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X + a_k}.$$

Les α_k sont des réels déterminés par la méthode usuelle dans le cas d'une fraction à pôles simples. En effet, $\alpha_k = \lim_{x \rightarrow -a_k} (x + a_k)R(x)$, c'est-à-dire

$$\alpha_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (-a_k - b_j)}{\prod_{j \neq k} (-a_k + a_j)} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j)}{\prod_{j \neq k} (a_k - a_j)}.$$

2.4 Application au calcul de Δ_n

2.4.1 On note L_1, \dots, L_n les lignes de Δ_n . On effectue sur Δ_n la transformation $L_n \leftarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i$ avec $\alpha_n \neq 0$. On obtient $\Delta_n = \frac{1}{\alpha_n} D_n$ où D_n est le déterminant obtenu en remplaçant la dernière ligne de Δ_n par la ligne $(R(b_1), R(b_2), \dots, R(b_n))$:

$$\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & \frac{1}{a_n + b_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & \frac{1}{a_n + b_{n-1}} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$$

2.4.2 Il est clair que $R(b_1) = \dots = R(b_{n-1}) = 0$, donc en développant D_n suivant sa dernière ligne, on obtient la relation : $\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$.

2.4.3

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} - \frac{1}{(a_1 + b_2)(a_2 + b_1)}$$

$$= \frac{(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + b_2)(a_2 + b_1)}.$$

On sait que $\Delta_n = \frac{R(b_n)}{\alpha_n} \Delta_{n-1}$, avec $\alpha_n = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (a_n + b_j)}{\prod_{j \neq n} (a_n - a_j)}$. D'où :

$$\Delta_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_n - b_k}{b_n + a_k} \right] \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_n - a_k}{a_n + b_k} \right] \frac{\Delta_{n-1}}{a_n + b_n}$$

et comme $\Delta_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$, on en déduit par récurrence sur n la formule fournie par l'énoncé :

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$