

Devoir Maison

Equations Différentielles

Problème – Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants

On étudie dans ce problème des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants, qui ne rentrent donc pas dans le cadre du cours. On cherche les solutions à valeurs réelles.

Partie A – Un exemple

On s'intéresse dans cette partie aux équations

$$(\mathcal{E}) : (\operatorname{sh} x)y'' + (2\operatorname{ch} x)y' + (\operatorname{sh} x)y = 0.$$

et

$$(\mathcal{E}') : (\operatorname{sh} x)y' + (\operatorname{ch} x)y = 0.$$

On étudie ces équations sur un intervalle I égal à \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* (et on cherche les solutions à valeurs réelles) : il n'y a donc pas de problème de raccord.

A.1 Résoudre l'équation (\mathcal{E}') sur I .

A.2 Montrer qu'une fonction deux fois dérivable f est solution de \mathcal{E} sur I si et seulement si $g : x \mapsto f'(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x}f(x)$ est solution de l'équation \mathcal{E}' sur I .

A.3 Résoudre \mathcal{E} sur I .

Partie B – Entrelacement de zéros

On fixe deux fonctions continues p et q , d'un intervalle I dans \mathbb{R} .

On considère les équations différentielles

$$(\mathcal{E}_p) \quad y'' + p(t)y = 0$$

et

$$(\mathcal{E}_q) \quad y'' + q(t)y = 0$$

On se donne deux solutions respectives f et g de ces équations.

Pour tout $t \in I$, on introduit le Wronskien à l'instant t :

$$W(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t).$$

B.1 Donner, pour tout $t \in I$, une expression simple de $W'(t)$ (en fonction de $f(t), g(t), p(t)$ et $q(t)$).

B.2 On suppose ici $p \leq q$ (*i.e.* $p(t) \leq q(t)$ pour tout $t \in I$). On suppose f nulle en α et β (où $\alpha < \beta$), et à valeurs strictement positives sur $\alpha, \beta[$.

a En admettant que le résultat sur les problèmes de Cauchy à l'ordre 2 s'étend à ce type d'équations, montrer que $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$ sont non nuls.

b En revenant à la définition du nombre dérivé d'une fonction (comme limite d'un taux d'accroissement), montrer que $f'(\alpha) > 0$ et $f'(\beta) < 0$.

c Montrer par l'absurde, en utilisant le Wronskien, qu'il existe un point γ de $\alpha, \beta]$ où g s'annule.

B.3

a Montrer que si $q \geq 1$, alors g s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur π .

b Montrer que si $q \leq 1$, et si g n'est pas nulle, alors g s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à π .

Partie C – L'équation de Bessel

On fixe un réel λ , et on considère sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle (de Bessel)

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0.$$

C.1 Montrer que f , fonction deux fois dérivable de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} , est solution de \mathcal{E} si et seulement si $g : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}') \quad z'' + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right)z = 0$$

C.2 Soit f une solution non nulle de \mathcal{E} . Déduire de ce qui précède que si $\lambda \geq \frac{1}{2}$ (*resp.* $\lambda \leq \frac{1}{2}$), alors f s'annule au plus (*resp.* au moins) une fois sur un segment de longueur π (*resp.* de longueur strictement inférieure à π).

Corrigé

Partie A – Un exemple

A.1 La fonction $1/\operatorname{sh}$ est solution évidente non nulle de \mathcal{E}' sur I , donc l'ensemble des solutions cherché est $\{\frac{\lambda}{\operatorname{sh}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

A.2 g est dérivable sur I puisque f est deux fois dérivable, et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = f''(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x} f'(x) - \frac{\operatorname{th}'(x)}{\operatorname{th}^2 x} f(x) = f''(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x} f'(x) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} f(x).$$

On a donc, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} x)g'(x) + (\operatorname{ch} x)g(x) &= \operatorname{sh}(x)f''(x) + \operatorname{ch}(x)f'(x) - \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}f(x) + \operatorname{ch}(x)f'(x) + \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}(x)}f(x) \\ &= \operatorname{sh}(x)f''(x) + 2\operatorname{ch}(x)f'(x) + \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{sh}(x)}f(x) \\ &= \operatorname{sh}(x)f''(x) + 2\operatorname{ch}(x)f'(x) + \operatorname{sh}(x)f(x), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

A.3 D'après ce qui précède, les solutions de \mathcal{E} sur I sont les solutions (sur I) de

$$(\mathcal{E}'') \quad y' + \frac{1}{\operatorname{th}(x)}y = \frac{\lambda}{\operatorname{sh}(x)},$$

pour un certain réel λ .

L'équation homogène associée à (\mathcal{E}'') , équivalente à \mathcal{E}' , a pour solution générale $x \mapsto \frac{\mu}{\operatorname{sh}(x)}$, où μ décrit \mathbb{R} . Pour en trouver une solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante : une solution de \mathcal{E}'' est $x \mapsto \frac{C(x)}{\operatorname{sh}(x)}$, où C est une primitive de la fonction constante de valeur μ : le choix $C : x \mapsto \mu x$ convient donc.

Ainsi la solution générale de \mathcal{E} est-elle

$$x \mapsto \frac{\lambda + \mu x}{\operatorname{sh}(x)},$$

où λ et μ décrivent \mathbb{R} .

Partie B – Entrelacement de zéros

B.1 W est bien dérivable, puisque f et g sont deux fois dérivables, et, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} W'(t) &= f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - f''(t)g(t) - f'(t)g'(t) \\ &= f(t)g''(t) - f''(t)g(t) \\ &= (p(t) - q(t))f(t)g(t). \end{aligned}$$

B.2

a On sait que $f(\alpha) = 0$. Si on avait en outre $f'(\alpha) = 0$, alors f serait l'unique solution à ce problème de Cauchy, et serait donc la fonction nulle, ce qui est exclu : $f'(\alpha) \neq 0$ et, de même, $f'(\beta) \neq 0$.

b Soit $t \in]\alpha, \beta[$. On a d'après les hypothèses $\frac{f(t)-f(\alpha)}{t-\alpha} > 0$, donc, en passant à la limite lorsque t tend vers α , $f'(\alpha) \geq 0$. Comme $f'(\alpha) \neq 0$, on a bien $f'(\alpha) > 0$, et, de même, $f'(\beta) < 0$.

c Supposons donc que g ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$. Quitte à considérer $-g$, on peut supposer que g ne prenne que des valeurs strictement positives. Dans ce cas, le Wronskien W est décroissant (sa dérivée est négative), or $W(\alpha) = -f'(\alpha)g(\alpha) < 0$ et $W(\beta) = -f'(\beta)g(\beta) > 0$, ce qui est absurde : g s'annule nécessairement.

B.3

a Supposons $q \geq 1$. On applique le résultat précédent pour p constante de valeur 1 : les solutions de \mathcal{E}_p sont les $x \mapsto A \cos(t - t_0)$, où A et t_0 décrivent \mathbb{R} . Pour tout segment $[\alpha, \beta]$ de longueur π , on peut donc trouver une solution de \mathcal{E}_p comme en B.2, à savoir $t \mapsto \sin(t - \alpha)$, prouvant ainsi que g s'annule nécessairement sur ce segment.

b Supposons que $q \leq 1$, que g soit non nulle, et que pourtant g s'annule au moins deux fois sur un segment $[\alpha, \beta]$ de longueur strictement inférieure à π . Quitte à réduire ce segment, on peut supposer que g s'annule en α et β , et qu'elle ne s'annule pas entre ces deux points.

D'après B.2, en échangeant les rôles de f et de g (et de p et de q), toute solution de $y'' + y = 0$ devrait s'annuler sur $[\alpha, \beta]$, de qui est faux pour $t \mapsto \cos\left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$: g s'annule au plus une fois sur $[\alpha, \beta]$.

Partie C – L'équation de Bessel

C.1 g est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* car f et la fonction racine carrée le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = f'(x)\sqrt{x} + \frac{f(x)}{2\sqrt{x}},$$

et

$$g''(x) = f''(x)\sqrt{x} + \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{f(x)}{4x^{3/2}},$$

donc

$$\begin{aligned} g''(x) + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right)g(x) &= f''(x)\sqrt{x} + \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{f(x)}{4x^{3/2}} + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right)f(x)\sqrt{x} \\ &= \sqrt{x} \left(f''(x) + \frac{f'(x)}{x} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)f(x) \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

C.2 Bien sûr, f et g ont le même lieu d'annulation. On peut appliquer les résultats de B.3 à g , où $q(x) = \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right)$: si $\lambda \geq \frac{1}{2}$, alors $q \leq 1$, donc g (et, partant f) s'annule au plus une fois sur un segment de longueur π . Si $\lambda \leq \frac{1}{2}$, alors $q \geq 1$, donc g (et, partant f) s'annule au moins une fois sur un segment de longueur strictement inférieure à π .