

Devoir Maison

Séries Numériques & Intégrales

CNC 2024

**Conseil : Ne traiter pas les questions sur les probabilités
si vous n'avez pas encore révisé ce chapitre**

Exercice

(Noté 4 points sur 20)

On pose $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$ et pour tout entier naturel non nul n , $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-3x} dx$.

1. a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = \frac{1}{3}$.
b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $x^n e^{-3x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n , I_n est une intégrale convergente.

2. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif A ,

$$\int_0^A x^{n+1} e^{-3x} dx = \frac{-A^{n+1}}{3} e^{-3A} + \frac{(n+1)}{3} \int_0^A x^n e^{-3x} dx$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3} I_n$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n = \frac{n!}{3^{n+1}}$.
5. Soit X la variable aléatoire de densité la fonction f définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)e^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X .
b) Déterminer la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X .

Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur \mathbb{R} par,

$$f_t(x) = e^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ tx f_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1 : Etude d'une variable aléatoire

On rappelle qu'une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} continue par morceaux est une densité de probabilité si f est positive sur \mathbb{R} , l'ensemble des points de discontinuité de f est une partie finie de \mathbb{R} , f est intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1. a) Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx$ est convergente.

b) Déterminer I_0 en fonction de t , (on pourra faire le changement de variable $(u = x\sqrt{t})$).

c) Déterminer I_1 sous forme d'une expression simple de t .

2. a) Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout réel $u \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2} f_t(x)dx$$

b) En déduire que, pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{t} I_{n-2}$.

3. a) Montrer que g_t est une densité de probabilité. Dans la suite, on note X_t une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant g_t pour densité.

b) Déterminer F_t la fonction de répartition de la variable aléatoire X_t .

c) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une espérance $\mathbb{E}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

d) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

e) Déterminer la valeur de t pour que l'écart type $\sigma(X_t)$ de X_t soit égal à 1.

4. Pour tout entier naturel k , on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante :

$$A_k = (\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}) \quad \text{et} \quad B_k = (\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2})$$

a) Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_k)$.

b) i) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

ii) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

iii) Est ce qu'on peut avoir $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$? Justifier votre réponse.

Partie 2 : Calcul d'une intégrale impropre

Pour tout entier n tel que $n \geq 0$ et pour tout réel x , on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x)$. Pour tout entier n tel que $n \geq 0$, on définit le moment d'ordre n de la fonction f_t par, $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_t(x) dx$, (on rappelle que m_n dépend de t).

1. Déterminer pour tout entier k tel que $k \geq 0$, m_{2k} et m_{2k+1} .
2. Montrer que, pour tous réels a , b et c tel que $a > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx$ est une intégrale convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$
3. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx$ est convergente et déterminer sa valeur.
4. Déterminer, pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$.
5. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}$.
6. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$.
7. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt$ est convergente.
8. Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(2k+1)2^{k-1}}$.

Partie 3 : Produit de convolution et une transformé

Dans la suite du problème, on note **E** l'ensemble des fonctions h continues sur, \mathbb{R} à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif M et un réel strictement positif λ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| \leq M f_t(\lambda x)$.

On admet le résultat suivant : *si ϕ une fonction continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telle qu'il existe deux applications ϕ_1 et ϕ_2 continues sur \mathbb{R} et intégrables sur \mathbb{R} , vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\phi(x, y)| \leq \phi_1(x)\phi_2(y)$, alors les deux expressions $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) dx \right) dy$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) dy \right) dx$ sont bien définies et elles sont égales.*

On rappelle que l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} à valeurs réelles, noté $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni des deux lois "+"

et "−" usuelles est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

1. Montrer que $(\mathbf{E}, +, .)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel et que la fonction f_t est un élément de **E**.
2. Soient φ et ψ deux éléments de **E**. On note $\varphi * \psi$ l'application définie, pour tout réel x , pour lequel l'intégrale existe, par $(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u) du$.
 - a) Montrer que $\varphi * \psi$ est définie sur \mathbb{R} .
 - b) Montrer que $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.
 - c) Déterminer $f_t * f_t$.
 - d) Montrer que $\varphi * \psi$ est un élément de **E**.

3. Soit φ un élément de \mathbf{E} . On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} \varphi(u) du$.
- Montrer que $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur \mathbb{R} .
 - Montrer que $\widehat{\varphi}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et déterminer, pour tout x de \mathbb{R} , les expressions de $\widehat{\varphi}'(x)$ et $\widehat{\varphi}''(x)$, chacune à l'aide d'une intégrale.
4. Soient φ et ψ deux éléments de \mathbf{E} .
- Montrer qu'il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x, u) de \mathbb{R}^2 ,

$$u^2 + (x - u)^2 \geq \alpha (u^2 + x^2)$$

- Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$.
- Montrer que, pour tout réel ω , $(\widehat{\varphi * \psi})(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) \cdot \widehat{\psi}(\omega)$.

Partie 4 : Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note \mathbf{E}_1 l'ensemble des fonctions ψ de \mathbf{E} telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 1$. Pour toute fonction ϕ de \mathbf{E}_1 , on considère la suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\phi_1 = \phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1$

- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, ϕ_n est un élément de \mathbf{E}_1 .
 - Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel x , $\widehat{\phi_n}(x)$ en fonction de $\widehat{\phi}(x)$ et de n .
 - Dans cette question, on prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right) f_t$, où f_t est la fonction définie au début du problème.
 - Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un réel $C_n(t)$, à déterminer, tel que $\forall x \in \mathbb{R}; \phi_n(x) = C_n(t) e^{-t \frac{x^2}{2n}}$.
 - Montrer qu'il existe une constante réelle ν strictement positive, tel que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel u , $\widehat{\phi_n}\left(u \sqrt{\frac{t}{n}}\right) = e^{\nu u^2}$.
 - Soit ϕ un élément quelconque de \mathbf{E}_1 . On pose pour tout entier naturel non nul n
- $$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \phi_n(u) du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \phi_n(u) du \quad \text{et} \quad V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$
- Montrer que la fonction $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{n,1}$ et de $M_{n,2}$.
 - En déduire que $M_{n,1} = n M_{1,1}$ et $V_n = n V_1$.
 - On suppose de plus dans cette question que la fonction ϕ vérifie $M_{1,1} = 0$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{\phi_n}\left(u \sqrt{\frac{t}{n}}\right)$.

- FIN DE L'ÉPREUVE -

**Concours National Commun
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1
Session 2024 - Filière MP**

m.laamoum2@gmail.com¹

Quelques rappels sur les variables aléatoires à densité :

- Une variable aléatoire X est dite à densité si il existe une fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue par morceaux et admet un nombre fini de points de discontinuité, intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ telle que pour tous réels $a \leq b$ on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.
- La fonction de répartition de f , notée F_X , est définie par $F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Pour tous réels $a \leq b$ on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$. En tout point x où f est continue on a $F'_X(x) = f(x)$.
- Si la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} alors l'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.
- Si la fonction $t \mapsto t^2f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} alors la variance de X est donnée par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

et l'écart-type est égale à $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exercice

1. a) On a pour $A \geq 0$ $\int_0^A e^{-3x}dx = \frac{1 - e^{-3A}}{3}$, donc l'intégrale I_0 converge et $I_0 = \frac{1}{3}$.
b) On sait que, pour tout entier naturel n , $x^{n+2}e^{-3x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $x^n e^{-3x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de l'infinie, donc la fonction $x \mapsto x^n e^{-3x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, d'où la convergence de l'intégrale I_n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \geq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1} e^{-3x} dx &= \int_0^A x^{n+1} \left(\frac{-e^{-3x}}{3} \right)' dx \\ &= \frac{-1}{3} [x^{n+1} e^{-3x}]_0^A + \frac{(n+1)}{3} \int_0^A x^n e^{-3x} dx \end{aligned}$$

ainsi
$$\int_0^A x^{n+1} e^{-3x} dx = \frac{-A^{n+1}}{3} e^{-3A} + \frac{(n+1)}{3} \int_0^A x^n e^{-3x} dx$$

3. Dans la relation précédente on fait tendre un A vers $+\infty$, on obtient pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3} I_n$.

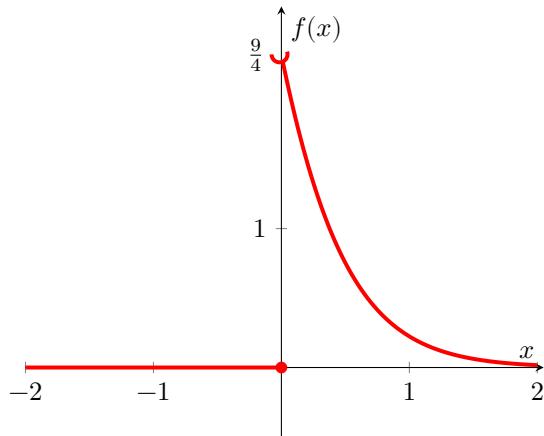
¹<https://tinyurl.com/2qyzzrbd>

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. De la question précédente on a

$$I_n = \frac{n}{3} \frac{n-1}{3} \cdots \frac{1}{3} I_0 = \frac{n!}{3^n} I_0$$

puisque $I_0 = \frac{1}{3}$ alors $I_n = \frac{n!}{3^{n+1}}$.

5. Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)e^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, dont une représentation graphique :



f est une fonction de densité car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{9}{4} (I_0 + I_1) = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) = 1.$$

a) D'après 1.b) on a $xf(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc la fonction $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc intégrable sur \mathbb{R} par suite X admet une espérance.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} x(1+x)e^{-3x} dx \\ &= \frac{9}{4} (I_1 + I_2) \\ &= \frac{9}{4} \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{27} \right) \end{aligned}$$

ainsi $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{12}$.

b) De même la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} donc X admet une variance.

On a

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{9}{4} (I_2 + I_3) = \frac{1}{3}$$

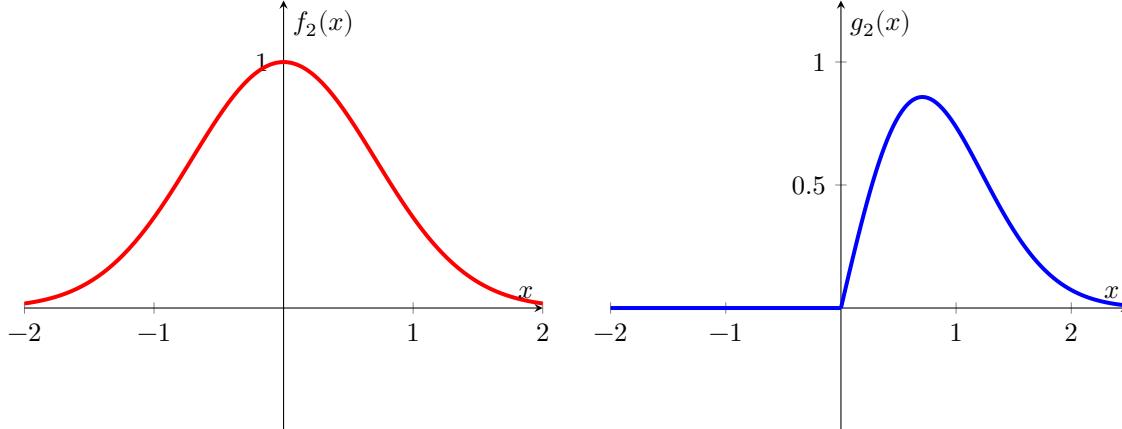
et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{23}{144}$.

Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur \mathbb{R} par,

$$f_t(x) = e^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ tx f_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Une représentation graphique dans le cas $t = 2$:



Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1: Etude d'une variable aléatoire

1. a) Soit $t > 0$. La fonction $x \mapsto x^n e^{-t\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $x^n e^{-t\frac{x^2}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$, ainsi l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n f_t(x) dx$ est convergente, pour tout entier n .

b) On a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{u=x\sqrt{t}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

donc
$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

c) On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x e^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-1}{t} \int_0^{+\infty} \left(e^{-t\frac{x^2}{2}} \right)' dx \\ &= \frac{-1}{t} \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-t\frac{A^2}{2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

donc
$$I_1 = \frac{1}{t}.$$

2. a) Soit $n \geq 2$ et $u \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^u x^n f_t(x) dx &= \int_0^u x^n e^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-1}{t} \int_0^u x^{n-1} \left(e^{-t\frac{x^2}{2}} \right)' dx \end{aligned}$$

une intégration par parties donne

$$\int_0^u x^n f_t(x) dx = \frac{-1}{t} \left[x^{n-1} e^{-t \frac{x^2}{2}} \right]_0^u + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2} e^{-t \frac{x^2}{2}} dx$$

ainsi $\int_0^u x^n f_t(x) dx = \frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2} f_t(x) dx$.

b) Puisque $\frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$ et les intégrales sont convergentes, alors par passage à la limite on trouve

$$\int_0^{+\infty} x^n f_t(x) dx = \frac{n-1}{t} \int_0^{+\infty} x^{n-2} f_t(x) dx$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{t} I_{n-2}$.

3. a) La fonction g_t est continue positive sur \mathbb{R} . Soit $A > 0$ on a

$$\int_{-A}^A g_t(x) dx = \int_0^A t x f_t(x) dx$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} t x f_t(x) dx$ est convergente donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x) dx$ est convergente, par passage à la limite on a

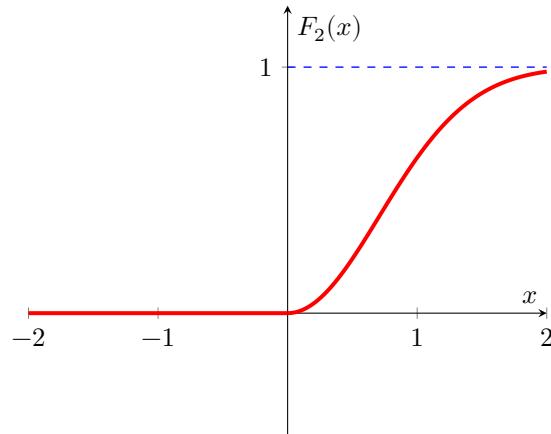
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x) dx = \int_0^{+\infty} t x f_t(x) dx = t I_1 = 1$$

Ainsi g_t est une densité de probabilité.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \int_{-\infty}^x g_t(u) du \\ &= \int_0^x t u e^{-t \frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_0^x -\left(e^{-t \frac{u^2}{2}} \right)' du \end{aligned}$$

ainsi $F_t(x) = 1 - e^{-t \frac{x^2}{2}}$.



c) Pour tout $x \geq 0$, on a $x g_t(x) = t x^2 f_t(x)$ donc la fonction $x \mapsto x g_t(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} , par suite X_t admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x g_t(x) dx \\ &= t \int_0^{+\infty} x^2 f_t(x) dx \\ &= t I_2 \end{aligned}$$

les questions 2)b) et 1)b) donnent : $I_2 = \frac{1}{t} I_0 = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X_t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}}.$

- d) Comme précédemment la fonction $x \mapsto x^2 g_t(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} , donc X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$.
On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X_t)^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_t(x) dx \\ &= t \int_0^{+\infty} x^3 f_t(x) dx \\ &= t I_3\end{aligned}$$

avec $I_3 = \frac{2}{t} I_1$ et $I_1 = \frac{1}{t}$ donc $\boxed{\mathbb{E}((X_t)^2) = \frac{2}{t}}.$

Et on a $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}((X_t)^2) - \mathbb{E}(X_t)^2$ donc $\boxed{\mathbb{V}(X_t) = \frac{4 - \pi}{2t}}.$

e) On a $\sigma(X_t) = \sqrt{\frac{4 - \pi}{2t}}$, donc $\sigma(X_t) = 1$ si et seulement si $\boxed{t = \frac{4 - \pi}{2}}.$

4. Pour tout entier naturel k , on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante:

$$A_k = (\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}) \text{ et } B_k = (\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2})$$

- a) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}) \\ &= \int_{\sqrt{2k}}^{\sqrt{2k+1}} g_t(x) dx \\ &= F_t(\sqrt{2k+1}) - F_t(\sqrt{2k})\end{aligned}$$

on sait que $F_t(x) = 1 - e^{-t \frac{x^2}{2}}$, donc $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = e^{-tk}(1 - e^{-\frac{t}{2}})}.$

De même $\mathbb{P}(B_k) = F_t(\sqrt{2k+2}) - F_t(\sqrt{2k+1})$ et $\boxed{\mathbb{P}(B_k) = e^{-t(k+\frac{1}{2})}(1 - e^{-\frac{t}{2}})}.$

- b) i) La série $\sum_{n \geq 0} e^{-tn}$ est géométrique est convergente donc la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente

et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{2}}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{t}{2}}}}.$

ii) De même on a la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est convergente et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = e^{-\frac{t}{2}} \frac{1 - e^{-\frac{t}{2}}}{1 - e^{-t}} = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{1 + e^{-\frac{t}{2}}}}.$

iii) Les événements $(A_k)_{k \geq 0}$ sont deux à deux disjoints donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{t}{2}}}.$

De même on a $(B_k)_{k \geq 0}$ sont deux à deux disjoints et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{1 + e^{-\frac{t}{2}}}.$

Donc on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$ si et seulement si $t = 0$, ce qui contredit le fait que $t > 0$.

Remarquons que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) > \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) < \frac{1}{2}$ ce qui justifie le résultat.

Les deux réunions ne sont pas complémentaires car $\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{R}^-) = 0$.

Partie 2: Calcul d'une intégrale impropre

Pour tout entier n tel que $n \geq 0$ et pour tout réel x , on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x)$. Pour tout entier n tel que $n \geq 0$, on définit le moment d'ordre n de la fonction f_t par, $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_t(x) dx$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question 1)a) de la partie 1 l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k f_t(x) dx$ est convergente, par parité de f_t on a la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 x^k f_t(x) dx$, ce qui justifie l'existence de m_k .

- On a

$$m_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} f_t(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-t \frac{x^2}{2}} dx$$

la fonction $x \mapsto x^{2k} e^{-t \frac{x^2}{2}} dx$ est paire donc

$$m_{2k} = 2 \int_0^{+\infty} x^{2k} e^{-t \frac{x^2}{2}} dx = 2I_{2k}$$

d'après la question 2)b) de la partie 1 on a

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{t} I_{2k-2} \\ &= \frac{2k-1}{t} \frac{2k-3}{t} \dots \frac{1}{t} I_0 \\ &= \frac{(2k)!}{t^k (2k \cdot (2k-2) \dots 2)} I_0 \\ &= \frac{(2k)!}{t^k 2^k k!} I_0 \end{aligned}$$

comme $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$ alors $I_{2k} = \frac{(2k)! \sqrt{\pi}}{(\sqrt{2t})^{2k+1} k!}$, ainsi $m_{2k} = 2 \frac{(2k)! \sqrt{\pi}}{(\sqrt{2t})^{2k+1} k!}$.

- De même $m_{2k+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} e^{-t \frac{x^2}{2}} dx$ et la fonction $x \mapsto x^{2k+1} e^{-t \frac{x^2}{2}}$ est impaire donc $m_{2k+1} = 0$.

2. Soit a, b et c des réels tels que $a > 0$. Pour tout réel x écrivons

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$, ce qui donne pour $A > 0$

$$\int_{-A}^{+A} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = e^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{-A}^{+A} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2} dx$$

on fait le changement de variable $u = \sqrt{2a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$:

$$\int_{-A}^{+A} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{\sqrt{2a}(-A+\frac{b}{2a})}^{\sqrt{2a}(A+\frac{b}{2a})} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx$ est convergente, par passage à la limite on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}}$$

3. • On a $|e^{-tx} f_t(x)| \leq |f_t(x)|$, la fonction f_t est intégrable sur $[0, +\infty[$ et elle est paire donc elle est intégrable sur \mathbb{R} , par suite la fonction $x \mapsto e^{-tx} f_t(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx$ est convergente.

- Remarquons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{t}{2}x^2+tx)} dx$$

Ensuite appliquons le résultat de la question précédente avec $a = \frac{t}{2}$, $b = t$ et $c = 0$, ce qui donne $\Delta = t^2$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{\frac{t}{2}}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_k \frac{(-tx)^k}{k!}$ converge et de somme e^{-tx} donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = e^{-tx} f_t(x)}$

5. D'après la question précédente, la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $x \mapsto e^{-tx} f_t(x)$.
Et on la majoration

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|tx|^k}{k!} f_t(x) \leq e^{|tx|} e^{-t \frac{x^2}{2}}$$

la fonction $\varphi : x \mapsto e^{|tx|} e^{-t \frac{x^2}{2}}$ est continue sur \mathbb{R} vérifie $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ et $\varphi(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$, donc elle est intégrable sur \mathbb{R} .

Le théorème de la convergence dominée permet d'écrire : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \right) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x) dx \right)$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-tx)^k}{k!} e^{-t \frac{x^2}{2}} dx \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-t \frac{x^2}{2}} dx \right)$$

Ainsi on a $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}}$.

6. D'après la question 1) on a $m_{2k+1} = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx$$

ce qui donne $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{\frac{t}{2}}}$.

7. Soit $a \in]0, 1]$, dans $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt$ on pose $u = \sqrt{t}$, ce qui donne

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt = 2 \int_{\sqrt{a}}^1 e^{\frac{u^2}{2}} du$$

on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt$ est convergente et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^1 e^{\frac{u^2}{2}} du$.

8. On a pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{u^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{2k}}{2^k k!}$ donc $\int_0^1 e^{\frac{u^2}{2}} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{u^{2k}}{2^k k!} du$, puisqu'il s'agit d'une série entière, ce qui donne $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(2k+1)2^{k-1}}}$

Partie 3: Produit de convolution et une transformé

1. • On a $\mathbf{E} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et il contient la fonction nulle, donc $\mathbf{E} \neq \emptyset$.

Soit φ, ψ dans \mathbf{E} et α, β dans \mathbb{R} , donc il existe $M_\varphi, M_\psi, \lambda_\varphi, \lambda_\psi$ dans \mathbb{R} tels que

$$M_\varphi \geq 0, M_\psi \geq 0, \lambda_\varphi > 0, \lambda_\psi > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq M_\varphi f_t(\lambda_\varphi x), |\psi(x)| \leq M_\psi f_t(\lambda_\psi x) \quad (1)$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)| \leq |\alpha| M_\varphi f_t(\lambda_\varphi x) + |\beta| M_\psi f_t(\lambda_\psi x)$$

soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$ alors $f_t(\lambda_\varphi x) \leq f_t(\delta x)$ et $f_t(\lambda_\psi x) \leq f_t(\delta x)$, par suite

$$|\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)| \leq (|\alpha| M_\varphi + |\beta| M_\psi) f_t(\delta x)$$

donc $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathbf{E}$. Ce qui prouve que est \mathbf{E} est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Si on prend $M = \lambda = 1$ on obtient $f_t \in \mathbf{E}$.

2. Soient φ et ψ deux éléments de \mathbf{E} , on garde les notations (1).

- a) Soit $x, u \in \mathbb{R}$ on a $|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u))$ et

$$f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u)) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right) \text{ et } f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u)) \underset{u \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

donc la fonction $u \mapsto f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u))$ est intégrable sur \mathbb{R} par suite $u \mapsto \varphi(u)\psi(x-u)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Ainsi $\varphi * \psi$ est bien définie sur \mathbb{R} .

- b) Écrivons

$$(\varphi * \psi)(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^{+A} \varphi(u)\psi(x-u) du$$

et posons $v = x - u$ alors pour tout $A > 0$

$$\int_{-A}^{+A} \varphi(u)\psi(x-u) du = \int_{x-A}^{x+A} \varphi(x-v)\psi(v) dv$$

par passage à la limite on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v)\varphi(x-v) dv$$

Ainsi $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

- c) Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} (f_t * f_t)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(u)f_t(x-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}(u^2+(u-x)^2)} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(tu^2-txu+\frac{1}{2}tx^2)} du \end{aligned}$$

d'après la question 2) de la partie 2 on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{\Delta}{4t}} \text{ avec } \Delta = -(tx)^2$$

$$\text{donc } (f_t * f_t)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{t}{4}x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}(x) \text{ ainsi } \boxed{f_t * f_t = \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}}$$

d) On garde les notations de la question 1). Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} |\varphi * \psi(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)| |\psi(x-u)| du \\ &\leq M_\varphi M_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u)) du \end{aligned}$$

Soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$, on a $f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u)) = f_t(\delta u) f_t(\delta(x-u))$ donc

$$|\varphi * \psi(x)| \leq M_\varphi M_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\delta u) f_t(\delta(x-u)) du$$

le changement de variable $v = \delta u$ donne

$$\begin{aligned} |\varphi * \psi(x)| &\leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(v) f_t(\delta x - v) dv \\ &\leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} (f_t * f_t)(\delta x) \end{aligned}$$

la question précédente donne $|\varphi * \psi(x)| \leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}(\delta x)$ et remarquons que $f_{\frac{t}{2}}(\delta x) = e^{-\frac{t}{2} \left(\frac{\delta x}{\sqrt{2}} \right)^2} = f_t \left(\frac{\delta x}{\sqrt{2}} \right)$.

Il suffit donc de prendre $M_{\varphi * \psi} = \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ et $\lambda_{\varphi * \psi} = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, ce qui justifie que $\varphi * \psi$ est un élément de \mathbf{E} .

3. Soit φ un élément de \mathbf{E} . On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} \varphi(u) du$.

a) Soit $x, u \in \mathbb{R}$ on a

$$|e^{-xu} \varphi(u)| \leq M_\varphi e^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u)$$

comme $e^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ et $e^{-xu} f_t(\lambda_\varphi) \underset{u \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ alors la fonction $u \mapsto e^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u)$ est intégrable sur \mathbb{R} , par suite la fonction $u \mapsto e^{-xu} \varphi(u)$ est intégrable sur \mathbb{R} , ainsi $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur \mathbb{R} .

b) Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, u) &\mapsto e^{-xu} \varphi(u) \end{cases}$, les dérivées partielles de h par rapport à x existent et sont continues sur \mathbb{R}^2 .

On a $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, u) = u^2 e^{-xu} \varphi(u)$ et pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^2$

Soit $A > 0$, on a pour tout $(x, u) \in [-A, A] \times \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, u) \right| \leq u^2 e^{|xu|} |\varphi(u)| \leq M_\varphi u^2 e^{A|u|} f_t(\lambda_\varphi u)$$

la fonction $u \mapsto M_\varphi u^2 e^{|xu|} f_t(\lambda_\varphi u)$ est intégrable sur \mathbb{R} (comme dans a)), c'est donc une fonction de domination.

Par le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale, $\widehat{\varphi}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[-A, A]$, ceci est valable pour tout $A > 0$ donc $\widehat{\varphi}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et

$$\boxed{\widehat{\varphi}'(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-xu} \varphi(u) du, \quad \widehat{\varphi}''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-xu} \varphi(u) du \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

4. Soient φ et ψ deux éléments de \mathbf{E} .

a) Pour tout (x, u) de \mathbb{R}^2 , $\|(x, u)\| = \sqrt{u^2 + x^2}$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 , posons $N(x, u) = \sqrt{u^2 + (x-u)^2}$. On vérifie facilement que N est une norme de \mathbb{R}^2 , comme on est en dimension finie ces deux normes sont équivalentes, d'où l'existence de $\beta \geq \alpha > 0$ tel que $\|(x, u)\| \alpha \leq N(x, u) \leq \beta \|(x, u)\|$. Ainsi il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x, u) de \mathbb{R}^2 , $\boxed{u^2 + (x-u)^2 \geq \alpha (u^2 + x^2)}$.

b) Soit (x, u) de \mathbb{R}^2 on a

$$|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi(x-u))$$

soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$ donc

$$|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\delta u) f_t(\delta(x-u))$$

remarquons que

$$f_t(\delta u) f_t(\delta(x-u)) = e^{-\frac{t\delta^2}{2}(u^2+(x-u)^2)}$$

d'après a) il existe $\alpha > 0$ tel que $u^2 + (x-u)^2 \geq \alpha(u^2 + x^2)$ donc

$$f_t(\delta u) f_t(\delta(x-u)) \leq e^{-\frac{t\delta^2}{2}(\alpha(u^2+x^2))}$$

Si on pose $\Phi : (x, u) \mapsto \varphi(u)\psi(x-u)$. Soit $\phi_1 : x \mapsto M_\varphi e^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2}$ et $\phi_2 : x \mapsto M_\psi e^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2}$ deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} , on a alors

$$|\Phi(x, u)| \leq \phi_1(x)\phi_2(u)$$

Le résultat admis au début de la partie permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u) du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u) dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-u) dx \right) du \end{aligned}$$

le changement de variable $x-u=v$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-u) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx$, par suite

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx}$$

c) Soit $\omega \in \mathbb{R}$, posons $\varphi_0 : x \mapsto e^{-\omega x}\varphi(x)$ et $\psi_0 : x \mapsto e^{-\omega x}\psi(x)$. Avec les notations de la question b) on définit les fonctions suivantes :

$\phi_1 : x \mapsto M_\varphi e^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2-\omega x}$ et $\phi_2 : x \mapsto M_\psi e^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2-\omega x}$, qui sont intégrables sur \mathbb{R} .

Le résultat de la question b) appliqué à φ_0 et ψ_0 donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_0 * \psi_0)(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x) dx$$

qui se traduit par

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega u} \varphi(u) e^{-\omega(x-u)} \psi(x-u) du \right) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \psi(x-u) du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x} \varphi(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x} \psi(x) dx \end{aligned}$$

Ainsi pour tout réel ω on a $\boxed{(\widehat{\varphi * \psi})(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) \cdot \widehat{\psi}(\omega)}$.

Partie 4: Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note \mathbf{E}_1 l'ensemble des fonctions ψ de \mathbf{E} telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 1$. Pour toute fonction ϕ de \mathbf{E}_1 , on considère la suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\phi_1 = \phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1$

1. Montrons le par récurrence sur n .

On a $\phi_1 \in \mathbf{E}_1$, supposons que $\phi_n \in \mathbf{E}_1$, d'après la question 2) de la partie 3 on a $\phi_{n+1} = \phi_n * \phi_1 \in \mathbf{E}$.

La question 4)b. donne

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n+1}(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_n * \phi_1)(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x) dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $\phi_{n+1} \in \mathbf{E}$. D'où pour tout entier $n \geq 1$, $\phi_n \in \mathbf{E}_1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 2) de la partie 3 on a

$$\widehat{\phi}_n(x) = \widehat{\phi_{n-1} * \phi_1}(x) = \widehat{\phi_{n-1}}(x) \cdot \widehat{\phi_1}(x) = \widehat{\phi_{n-1}}(x) \cdot \widehat{\phi}(x)$$

par suite $\boxed{\widehat{\phi}_n(x) = (\widehat{\phi}(x))^n}$.

3. On prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right) f_t$.

a) Par récurrence sur $n \geq 1$.

- On a $\phi_1(x) = C_1(t) e^{-t\frac{x^2}{2}}$ avec $C_1(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$.
- Supposons que $\phi_n(x) = C_n(t) e^{-t\frac{x^2}{2n}}$, alors

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x) &= (\phi_n * \phi)(x) \\ &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} C_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\frac{u^2}{2n} - t\frac{(x-u)^2}{2}} du \\ &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} C_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2n}((n+1)u^2 - 2nux + nx^2)} du \end{aligned}$$

simplifions l'exposant

$$t\frac{u^2}{2n} + t\frac{(x-u)^2}{2} = \frac{t(n+1)}{2n}u^2 - tux + \frac{t}{2}x^2$$

la question 2) de la partie 2 nous donne, avec $a = \frac{t(n+1)}{2n}$ et $\Delta = -\frac{t^2x^2}{n}$

$$\phi_{n+1}(x) = C_n(t) \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{\frac{-tx^2}{2(n+1)}}$$

Nous obtenons le résultat pour $n+1$ avec $C_{n+1}(t) = C_n(t) \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

- Cette relation permet d'avoir $C_n(t) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \cdots \sqrt{\frac{1}{2}} C_1(t)$ par suite $C_n(t) = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}$
- Finalement on a pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}} e^{-t\frac{x^2}{2n}}}$.

b) Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\phi}_n\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x} \phi_n(x) dx = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x} e^{-t\frac{x^2}{2n}} dx$$

le changement de variable $s = \sqrt{\frac{t}{n}}x$ donne

$$\widehat{\phi}_n\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-us} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\frac{1}{2}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s+u)^2}{2}} ds$$

et on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s+u)^2}{2}} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$, ainsi $\boxed{\widehat{\phi}_n\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = e^{\frac{1}{2}u^2}}$

4. Soit ϕ un élément quelconque de \mathbf{E}_1 . On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_n(u)du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\phi_n(u)du \quad \text{et} \quad V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$

- a) La question 3) de la partie 3 permet d'établir par récurrence que $\widehat{\phi}_n$ est de classe \mathcal{C}^2 de plus $M_{n,1} = -(\widehat{\phi}_n)'(0)$ et $M_{n,2} = (\widehat{\phi}_n)''(0)$.

Donc $\widehat{\phi}_n$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\widehat{\phi}_n(t) = 1 + (\widehat{\phi}_n)'(0)t + \frac{1}{2}(\widehat{\phi}_n)''(0)t^2 + o(t^2) = 1 - M_{1,n}t + \frac{1}{2}M_{2,n}t^2 + o(t^2).$$

- b) On a la relation $\widehat{\phi}_n(t) = (\widehat{\phi}(t))^n$ et

$$\begin{aligned} (\widehat{\phi}(t))^n &= \left(1 - M_{1,1}t + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n \\ &= 1 - nM_{1,1}t + \left(\frac{n}{2}M_{2,1} + \frac{n(n-1)}{2}M_{1,1}^2\right)t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Par unicité du D.L, on en déduit : $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $M_{2,n} = nM_{2,1} + n(n-1)M_{1,1}^2$,

donc $V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2 = nM_{2,1} - nM_{1,1}^2 = nV_1$, ainsi $\boxed{M_{1,n} = nM_{1,1} \quad \text{et} \quad V_n = nV_1}$.

5. Si $M_{1,1} = 0$ alors $\widehat{\phi}_n(t) = \left(1 + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, pour n assez grand on a

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n \left(\frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\phi}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2}\right)}$.

- FIN -