

## Devoir Maison :

# Polynômes et applications linéaires

CCINP 2022

### Application sur $\mathbb{R}_n[X]$ , $\Phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Le but de cet exercice est l'étude de l'application  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  avec  $n$  un entier fixé non nul par :

$$\Phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

afin de permettre le calcul de somme d'entiers.

On note pour tout  $k$  entier non nul  $\Phi^k$  la composée  $k$ -ième de l'application  $\Phi$ .

### Partie I - Préliminaires

**Q1.** Donner la formule du binôme de Newton.

**Q2.** Soit  $k$  un entier non nul. Montrer que :

$$(X+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i.$$

**Q3.** On considère les polynômes  $P_0(X) = 1$ ,  $P_1(X) = X$ ,  $P_2(X) = X^2$  et  $P_3(X) = X^3$ .  
Montrer que :

$$\Phi(P_0)(X) = 0,$$

$$\Phi(P_1)(X) = 1,$$

$$\Phi(P_2)(X) = 2X + 1,$$

$$\Phi(P_3)(X) = 3X^2 + 3X + 1.$$

**Q4.** Calculer  $\Phi^2(P_2)(X)$  et  $\Phi^3(P_2)(X)$ .

**Q5.** Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q6.** Montrer que pour tout polynôme non constant  $P$  de degré  $k$  avec  $k$  un entier non nul,  $\Phi(P)$  est un polynôme de degré  $k-1$ .

**Q7.** Calculer le noyau de  $\Phi$ .

**Q8.** Donner l'image de  $\Phi$ .

**Q9.** Soient  $P$  et  $Q$ , deux éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ , tels que  $\Phi(Q) = P$ .  
Montrer que :

$$\sum_{i=0}^n P(i) = Q(n+1) - Q(0).$$

## Partie II - Une famille de polynômes

**Q10.** Considérons la famille  $(H_i)_{i \in [0, n]}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  où pour chaque  $i$  non nul,

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (X-k)}{i!}$$

et  $H_0 = P_0$  le polynôme constant égal à 1.

Prouver que  $(H_i)_{i \in [0, n]}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  :

**Q11.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $H_i(0) = 0$ .

**Q12.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $\Phi(H_i) = H_{i-1}$ .

**Q13.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $\Phi^i(H_i) = 1$ .

**Q14.** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(X)$  avec  $a_k$  réel pour tout  $k$  entier entre 0 et  $n$ .

Montrer que  $P(0) = a_0$  et que pour  $l$ , un entier fixé entre 1 et  $n$ ,  $a_l = \Phi^l(P)(0)$ .

**Q15.** En déduire que tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  peut s'écrire (de manière unique) sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \Phi^k(P)(0) H_k(X).$$

**Q16.** Vérifier que  $X = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X)$ .

**Q17.** Déduire à l'aide de **Q9**, de **Q12** et de **Q16** que :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Q18.** Vérifier que  $X^2 = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) + 2 \times H_2(X)$ .

**Q19.** En déduire que  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**Q20.** Proposer en **Python** une fonction qui renvoie la valeur de la somme des cubes des  $n$  premiers entiers prenant en argument un entier naturel  $n$  passé en paramètre.