

Devoir Maison : Polynômes

CCINP 2023

UTILISATION DES POLYNOMES DE TCHEBYCHEV EN ANALYSE

Notations :

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel.

On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.

Si f est un élément de E , on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.

1. Existence et unicité

a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété (*):

$$(*) : \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

(on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$).

b) Montrer qu'un polynôme vérifiant (*) est unique.

On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n , on le note T_n .

On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

2. a) Montrer que $\forall x \in [-1,1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$

(on pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$).

b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3 .

c) Donner le coefficient du terme de plus haut degré de T_n .

3. Racines et extrema

a) Montrer que $\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k)$ où $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.

b) On pose pour k dans $\{0, 1, \dots, n\}$, $c_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$.

Calculer $\|T_n\|_\infty$ puis montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \text{ et que : } \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k).$$

Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont appelés points de Tchebychev.

c) Dessiner le graphe de T_3 , préciser sur le graphe les réels c_0, c_1, c_2, c_3 .

Corrigé

I. Polynômes de Tchebychev

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((e^{i\theta})^n) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) (i\sin(\theta))^k\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} i^{2k} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta) + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} i^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(\theta) \sin^{2k+1}(\theta)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta) + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(\theta) \sin^{2k+1}(\theta)\right) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^k\end{aligned}$$

Posons $T = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k$. Alors pour tout réel θ

$$T(\cos \theta) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^k = \cos(n\theta).$$

Ceci démontre l'existence de T_n .

b) Soit P un polynôme vérifiant (*). Alors pour tout réel θ , $P(\cos \theta) = \cos(n\theta) = T(\cos \theta)$ et donc $\forall x \in [-1, 1]$, $P(x) = T(x)$. Ainsi, les polynômes P et T coïncident en une infinité de valeurs et sont donc égaux. Ceci démontre l'unicité de T .

$$T_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k.$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $\theta = \operatorname{Arccos}(x)$ de sorte que $x = \cos(\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned}T_n(x) + T_{n+2}(x) &= T_n(\cos(\theta)) + T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) \\ &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2xT_{n+1}(x).\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Ainsi, les polynômes $T_n + T_{n+2}$ et $2XT_{n+1}$ coïncident en une infinité de valeurs. Ces polynômes sont donc égaux. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

b) On a immédiatement $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Puis $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$.

$$T_0 = 1, T_1 = X, T_2 = 2X^2 - 1 \text{ et } T_3 = 4X^3 - 3X.$$

c) Montrons par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(T_n) = n$ et $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

- T_1 est un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1 = 2^{1-1} et T_2 est un polynôme de degré 2 et de coefficient dominant 2 = 2^{2-1} . Le résultat est donc vrai quand $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\deg(T_n) = n$, $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$, $\deg(T_{n+1}) = n+1$ et $\text{dom}(T_{n+1}) = 2^n$. Alors

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(XT_{n+1}) = 1 + (n+1) = n+2,$$

et

$$\text{dom}(T_{n+2}) = \text{dom}(2XT_{n+1} - T_n) = \text{dom}(XT_{n+1}) = 2\text{dom}(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}.$$

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(T_n) = n \text{ et } \text{dom}(T_n) = 2^{n-1}.$$

D'autre part, $T_0 = 1$ est un polynôme de degré 0 et de coefficient dominant 1.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $\theta = \text{Arccos}(x)$ de sorte que $x = \cos(\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\Leftrightarrow T_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $0 \leq k \leq n-1$, on a

$$0 \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \frac{(2(n-1)+1)\pi}{2n} = \pi - \frac{\pi}{2n} \leq \pi.$$

Comme la fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$, on en déduit que les n nombres $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont n réels deux à deux distincts, tous racines du polynôme T_n . Comme le polynôme T_n est de degré n , ces nombres sont toutes les racines de T_n , nécessairement toutes simples et dans $[-1, 1]$. Enfin, puisque $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$, on a la factorisation

$$\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos(\theta_k)) \text{ où } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [-1, 1]$, en posant $\theta = \text{Arccos}(x)$, on a

$$|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1,$$

ce qui montre déjà que $\|T_n\|_\infty \leq 1$. Comme d'autre part

$$\|T_n\|_\infty \geq |T_n(1)| = |T_n(\cos(0))| = |\cos(n \times 0)| = 1,$$

on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\|_\infty = 1.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$|T_n(c_k)| = |T_n(\cos(\frac{k\pi}{n}))| = |\cos(n \times \frac{k\pi}{n})| = |\cos(k\pi)| = 1.$$

Plus précisément, $T_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ et en particulier, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)).$$

c) $c_0 = \cos(0) = 1$ et $T_3(c_0) = 1$. $c_1 = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $T_3(c_1) = -1$. $c_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $T_3(c_2) = 1$. $c_3 = \cos(\pi) = -1$ et $T_3(c_3) = -1$

