DM : EV Préhilbertiens

CNC 2025

EXERCICE

(Noté 4 points sur 20)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{Vect}(u,v)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

1. On pose $f_1 = (1,1,1)$ et $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\big\}$.

a) Déterminer deux vecteurs f_2 et f_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $F = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$, avec $f_2 = (a,0,b)$ et $f_3 = (0,c,d)$, où a,b,c et d sont à déterminer.

b) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.a) Vérifier que $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = \mathrm{O}_3$, avec $\mathrm{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle.

b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

3.a) Déterminer les deux réels α et β tels que : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$, où a,b,c et d sont les réels trouvés dans la question 1. a).

b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible, qui sont à déterminer, telles que $A = PDP^{-1}$.

c) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

PROBLÈME

On désigne par n un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes.
Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par $\chi_M(X) = \det(X\mathrm{I}_n - M)$ le polynôme caractéristique de M.
On note $M^\intercal$ la matrice transposée de la matrice M et $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice carrée M.
On rappelle que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ii}$.
On note $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $a_1, \ldots, a_n$ dans cet ordre. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $S^\intercal = S$.
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\intercal SX \geq 0$.
$\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Le problème traite des propriétés et des applications qui sont autour de la notion de trace.

PARTIE 1
Préliminaires

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$, est linéaire.

2. Soient $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \displaystyle\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{l,k}\ n_{k,l}$.

b) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

c) Montrer que si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(N)$.

3. On considère l'ensemble $F = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est diagonale et } \mathrm{Tr}(M) = 0\big\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer la dimension de F.

c) En déduire que, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $G = PFP^{-1} = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\big\}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad ; \quad X \mapsto X + \mathrm{Tr}(X).A$$

a) Vérifier que Φ_A est une application linéaire.
Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(*) \quad \Phi_A(X) = B$$

b) On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.

i) On suppose que M est une solution de l'équation matricielle $(*)$. Déterminer $\mathrm{Tr}(M)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et de $\mathrm{Tr}(B)$.

ii) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $(*)$.

iii) En déduire que Φ_A est un automorphisme d'espaces vectoriels.

c) On suppose maintenant que $\mathrm{Tr}(A) = -1$.

i) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, selon les valeurs de $\mathrm{Tr}(B)$, l'équation matricielle $(*)$.

ii) Montrer que Φ_A est un projecteur sur un sous-espace vectoriel F_1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à un sous-espace vectoriel F_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer F_1 et F_2.

PARTIE 2

La valeur absolue de la trace comme étant une "fonction génératrice"

Dans cette partie, on note $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2 et que sa base canonique est $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1. Pour tous entiers h et k tels que $1 \leq h, k \leq n$, on désigne par $\delta_{h,k}$ le symbole de Kronecker qui est défini par $\delta_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = k \\ 0 & \text{si } h \neq k \end{cases}$.

On rappelle que pour tous entiers naturels i, j, k, l tels que $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$. Une application q de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^+$ est dite semi-norme sur $\mathcal{E}$, si elle vérifie :

- $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda M) = |\lambda| q(M)$.
- $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(M + N) \leq q(M) + q(N)$.

On dit qu'une semi-norme q sur $\mathcal{E}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(MN) = q(NM)$.

1. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$.

a) Montrer que $q(\mathrm{O}_n) = 0$, où O_n est la matrice nulle de $\mathcal{E}$, et que pour tout M de $\mathcal{E}$, $q(-M) = q(M)$.

b) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, $|q(M) - q(N)| \leq q(M + N)$.

c) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, si $q(N) = 0$ alors $q(M + N) = q(M)$.

2. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ par $f(M) = |\mathrm{Tr}(M)|$. Montrer que f est une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

Dans les questions 3. et 4. de cette partie, on suppose que $n \geq 2$.

3. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$ telles que,

$$A = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1}$$

a) Montrer que $AB = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{i,1}$.

b) Montrer que $BA = \sum_{h=1}^{n} \left(\alpha_h \sum_{j=1}^{n} E_{h,j}\right)$.

4. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que pour tous entiers distincts i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $q(E_{i,j}) = 0$, (*on pourra utiliser le fait que* $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j}$).

b) En déduire que $q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1}E_{i,1}\right) = 0$.

c) Vérifier que $q(M) = q\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i}\right)$.

d) Montrer, en prenant des valeurs précises pour $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ qui définissent la matrice B, que $q(M) = q(BA)$.

e) Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $q = \alpha f$.

5. Dans le cas où $n = 1$, le résultat démontré ci-dessus reste-t-il valable ? justifier votre réponse.

PARTIE 3

Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\intercal M = \mathrm{I}_n$.

1. On considère une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Soit la matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, λ_k sont des réels positifs. Soit $U = (u_{k,j})_{1\leq k,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

i) Montrer que pour tous entiers k et i, $1 \leq k, i \leq n$, $|u_{k,i}| \leq 1$.

ii) Vérifier que $DU = (\lambda_k u_{k,j})_{1\leq k,j\leq n}$.

iii) En déduire que $\mathrm{Tr}(DU) \leq \mathrm{Tr}(D)$.

b) Soit U une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

i) Montrer qu'il existe une matrice P de $\mathcal{O}(n)$ et une matrice $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, avec pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, a_i sont des réels positifs et $S = P.D.{}^tP$.

ii) Montrer, en posant $V = P^\intercal UP$, que $SU = P(DV)P^\intercal$.

iii) En déduire que $\mathrm{Tr}(SU) \leq \mathrm{Tr}(S)$.

2. Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall U \in \mathcal{O}(n) \quad \mathrm{Tr}(AU) \leq \mathrm{Tr}(A)$$

a) i) Montrer que, pour tous réels a, b, α, il existe un réel φ tel que, $a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$.

ii) En déduire que, si pour tout réel α, $a\cos\alpha + b\sin\alpha \leq a$ alors $b = 0$.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, $\Pi_{p,q}$ le plan engendré par la famille (e_p, e_q). On considère $u_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de $u_{p,q}$ sur $\Pi_{p,q}$ est la rotation du plan $\Pi_{p,q}$ d'angle α et la restriction de $u_{p,q}$ sur l'orthogonal de $\Pi_{p,q}$ est l'application identité de l'orthogonal de $\Pi_{p,q}$.

i) Écrire la matrice $U_{1,2}$ de $u_{1,2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et montrer que $U_{1,2}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii) Calculer $\mathrm{Tr}(AU_{1,2})$ en fonction de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $(a_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ et de α.

iii) En déduire que $a_{1,2} = a_{2,1}$.

iv) Écrire, dans le cas général, la matrice $U_{p,q}$ de $u_{p,q}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

v) Calculer, dans le cas général, $\mathrm{Tr}(AU_{p,q})$ en fonction de $a_{p,q}$, $a_{q,p}$, $(a_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ et de α.

vi) En déduire que A est une matrice symétrique.

c) i) Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme g canoniquement associée à la matrice A.
Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note γ_i la valeur propre de g associée au vecteur propre v_i.

ii) Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$. On considère l'endomorphisme w_j de $\mathbb{R}^n$ défini par $w_j(v_j) = -v_j$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ et $k \neq j$, $w_j(v_k) = v_k$.
Soit W_j la matrice de l'endomorphisme w_j relativement à la base $\mathcal{B}$.
Vérifier que W_j est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{Tr}(AW_j)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et de γ_j. En déduire que $\gamma_j \geq 0$.

d) En déduire que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours National Commun

CORRIGÉ DE
L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2
Session 2025 - Filière MP

m.laamoum2@gmail.com [1]

EXERCICE

1. On pose $f_1 = (1,1,1)$ et $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\big\}$.

a) Soit $f = (x,y,z) \in F$, donc $z = x+y$, ce qui donne

$$f = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$$

Soit $f_2 = (1,0,1)$ et $f_3 = (0,1,1)$. La famille (f_2, f_3) est génératrice de F, ainsi, $F = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$.

b) Nous avons $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,0,1)$ et $f_3 = (0,1,1)$.
Le déterminant de la famille (f_1, f_2, f_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) - (1-1) = -1$$

Donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre, de cardinal 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.a) On vérifie que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = \mathrm{O}_3}$.

b) On a $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = \mathrm{O}_3$, on peut écrire $3A - A^2 = 2\mathrm{I}_3$, donc $A\left(\frac{1}{2}(3\mathrm{I}_3 - A)\right) = \mathrm{I}_3$.

Ainsi A est inversible et son inverse est $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{I}_3 - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici `https://tinyurl.com/4up84xze`

26-05-2025

3.a) On prend ici $f_1 = (1,1,1)^\intercal$, $f_2 = (1,0,1)^\intercal$ et $f_3 = (0,1,1)^\intercal$. On vérifie facilement que $Af_1 = f_1$, $Af_2 = 2f_2$ et $Af_3 = 2f_3$. Donc $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

b) D'après les questions Q1.b et Q3.a, (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs propres de A.

Donc la matrice A est diagonalisable, et on a $A = PDP^{-1}$ avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (*La matrice de passage de la base canonique vers la base* (f_1, f_2, f_3)), et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a aussi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Se fait simplement par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, $A^0 = PD^0P^{-1} = \mathrm{I}_3$.

Supposons le pour un entier $n \geq 0$, donc

$$A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^n\mathrm{I}_3DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

donc c'est vraie pour $n + 1$.

Conclusion : $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.

Dans notre cas

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1 & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME

PARTIE 1

Préliminaires

1. Soient $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, $N = (n_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$M + \lambda N$ est la matrice de terme général $(m_{i,j} + \lambda n_{i,j})$. On a

$$\mathrm{Tr}(M + \lambda N) = \sum_{i=1}^{n} (m_{i,i} + \lambda n_{i,i}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} n_{i,i}$$

Donc, $\boxed{\mathrm{Tr}(M + \lambda N) = \mathrm{Tr}(M) + \lambda \mathrm{Tr}(N)}$. L'application Tr est linéaire.

2. Soient $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $N = (n_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $P = MN = (p_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. On a

$$p_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j}.$$

Donc,

$$\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^{n} p_{l,l} = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{l,k} n_{k,l} \right) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{l,k} n_{k,l}$$

b) Soit $Q = NM = (q_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, on a

$$q_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} n_{i,l} m_{l,j}.$$

D'après Q2.a), $\mathrm{Tr}(MN) = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{l,k} n_{k,l}$.
On permute les deux sommes

$$\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{l,k} n_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_{l,k} n_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} q_{k,k} = \mathrm{Tr}(NM)$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)}$.

c) Si M et N sont semblables, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = PMP^{-1}$. Alors

$$\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(P \left(MP^{-1} \right)) = \mathrm{Tr}(\left(MP^{-1} \right) P) = \mathrm{Tr}(M \left(P^{-1} P \right)) = \mathrm{Tr}(M)$$

Donc, les matrices semblables ont la même trace.

3. On considère l'ensemble $F = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est diagonale et } \mathrm{Tr}(M) = 0 \big\}$.

a) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- La matrice nulle O_n est diagonale et $\mathrm{Tr}(\mathrm{O}_n) = 0$, donc $\mathrm{O}_n \in F$. F n'est pas vide.
- Soient $M_1, M_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. M_1 et M_2 sont diagonales, donc $M_1 + \lambda M_2$ est une matrice diagonale. $\mathrm{Tr}(M_1) = 0$ et $\mathrm{Tr}(M_2) = 0$. Par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}(M_1 + \lambda M_2) = \mathrm{Tr}(M_1) + \lambda \mathrm{Tr}(M_2) = 0$. Donc $M_1 + \lambda M_2 \in F$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Autre méthode : On a $F = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$, avec $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonales.
Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) On a

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow M = \mathrm{Diag}(a_1, ..., a_n) \text{ et } a_1 + ... + a_n = 0 \\ &\Leftrightarrow M = \mathrm{Diag}\big(a_1, ..., -(a_1 + ... + a_{n-1})\big) \\ &\Leftrightarrow M = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\big(E_{i,i} - E_{n,n}\big) \end{aligned}$$

La famille $\big(E_{i,i} - E_{n,n}\big)_{1\leq i\leq n-1}$est génératrice de F et $\boxed{\dim(F) = n-1}$.

Autre méthode : L'application $\mathrm{Tr}|_{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} : \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle. Son image est donc $\mathbb{R}$, de dimension 1. $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}|_{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})})$. D'après le théorème du rang, $\dim(F)$ =$\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))-\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}|_{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})})) = n-1$.

c) Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $G = PFP^{-1} = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\big\}$.

Considérons l'application $\varphi_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_P(X) = PXP^{-1}$.

φ_P est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($(\varphi_P)^{-1} = \varphi_{P^{-1}}$), donc elle conserve la dimension des sous-espaces.

Comme $G = \varphi_P(F)$, alors $\dim(G)$ =$\dim(F) = n-1$.

Ainsi $\boxed{\dim(G) = n-1}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad ; \quad X \mapsto X + \mathrm{Tr}(X).A$$

a) Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Phi_A(X_1 + \lambda X_2) &= (X_1 + \lambda X_2) + \mathrm{Tr}(X_1 + \lambda X_2)A \\ &= X_1 + \lambda X_2 + (\mathrm{Tr}(X_1) + \lambda \mathrm{Tr}(X_2))A \\ &= (X_1 + \mathrm{Tr}(X_1)A) + \lambda(X_2 + \mathrm{Tr}(X_2)A) \\ &= \Phi_A(X_1) + \lambda\Phi_A(X_2). \end{aligned}$$

Donc Φ_A est linéaire.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(*) \quad \Phi_A(X) = B$$

b) On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.

i) Si M est solution de $(*)$ alors, $M + \mathrm{Tr}(M)A = B$. Appliquons la trace aux deux membres :

$$\mathrm{Tr}(M + \mathrm{Tr}(M)A) = \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(M)A) = \mathrm{Tr}(M)(1 + \mathrm{Tr}(A)) = \mathrm{Tr}(B)$$

Puisque $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, $1 + \mathrm{Tr}(A) \neq 0$ alors $\boxed{\mathrm{Tr}(M) = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}}$.

ii) Si M est solution de $(*)$ alors, $M = B - \mathrm{Tr}(M)A$.
En substituant la valeur de $\mathrm{Tr}(M)$ trouvée précédemment : $M = B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A$.
Réciproquement, vérifions si cette expression de M est bien solution.
Soit $M_0 = B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A$. On a

$$\mathrm{Tr}(M_0) = \mathrm{Tr}\left(B - \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A\right) = \mathrm{Tr}(B) - \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}\mathrm{Tr}(A) = \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$$

Donc

$$\Phi_A(M_0) = M_0 + \mathrm{Tr}(M_0)A = \left(B - \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A\right) + \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A = B.$$

Ainsi $\boxed{M = B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1+\mathrm{Tr}(A)}A}$ est l'unique solution de l'équation $(*)$.

iii) Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation $\Phi_A(X) = B$ admet une solution unique. Ceci signifie que Φ_A est bijective. Donc Φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) On suppose maintenant que $\mathrm{Tr}(A) = -1$.

i) Dans l'équation $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$, on compose avec la trace :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(X) - \mathrm{Tr}(X) = 0$$

Cas 1 : Si $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$. L'équation $(*)$ n'a aucune solution.

Cas 2 : Si $\mathrm{Tr}(B) = 0$. La condition nécessaire est satisfaite.

On remarque que B est solution particulière de $(*)$.

Soit X une autre solution de $(*)$, posons $Y = X - B$ sont solutions de $(*)$, alors

$$B = X + \mathrm{Tr}(X)A = Y + B + \mathrm{Tr}(Y+B)A = Y + B + \mathrm{Tr}(Y)A$$

par suite

$$Y + \mathrm{Tr}(Y)A = 0$$

Autrement dit Y est colinéaire avec A et $X = B - \mathrm{Tr}(Y)A$.

Réciproquement, soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $X = B - tA$.

Alors $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(B) - t\mathrm{Tr}(A) = t$ et $X + \mathrm{Tr}(X)A = X + tA = B$. Par suite X est une solution de $(*)$.

Ainsi, si $\mathrm{Tr}(B) = 0$, l'ensemble des solutions de $(*)$ est $\boxed{\left\{B - tA \mid t \in \mathbb{R}\right\}}$.

ii) Montrons que $\Phi_A$est une projection.

- Vérifions que $\Phi_A \circ \Phi_A = \Phi_A$.

  On a

  $$\Phi_A(\Phi_A(X)) = \Phi_A(X + \mathrm{Tr}(X)A) = (X + \mathrm{Tr}(X)A) + \mathrm{Tr}(X + \mathrm{Tr}(X)A)A$$

  et

  $$\mathrm{Tr}(X + \mathrm{Tr}(X)A) = \mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(X) - \mathrm{Tr}(X) = 0$$

  donc

  $$\Phi_A\left(\Phi_A(X)\right) = \Phi_A(X).$$

  Φ_A est bien un projecteur.

- Φ_A est une projection sur $F_1 = \mathrm{Im}(\Phi_A)$ parallèlemnt à $F_2 = \mathrm{Ker}(\Phi_A)$.

  Soit $Y \in \mathrm{Im}(\Phi_A)$. Alors $Y = \Phi_A(X)$ pour un certain X. On a

  $$\mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}(\Phi_A(X)) = \mathrm{Tr}\left(X + \mathrm{Tr}(X)A\right) = \mathrm{Tr}\left(X\right) + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A) = 0.$$

  Donc $\mathrm{Im}(\Phi_A) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

  Réciproquement, si $Y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, alors $\Phi_A(Y) = Y + \mathrm{Tr}(Y)A = Y$. Donc $Y \in \mathrm{Im}(\Phi_A)$.

  Ainsi, $\boxed{F_1 = \mathrm{Im}(\Phi_A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}}$.

  On a $F_2 = \mathrm{Ker}(\Phi_A)$, c'est l'ensemble des solutions de $(*)$ avec $B = \mathrm{O}_n$.

  D'après i) on a $\mathrm{Ker}(\Phi_A) = \left\{-tA \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

  Ainsi $\boxed{F_2 = \mathrm{Ker}(\Phi_A) = \mathrm{Vect}(A)}$.

PARTIE 2

La valeur absolue de la trace comme étant une "fonction génératrice"

1. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$.

a) On a

$$q(\mathrm{O}_n) = q(0.\mathrm{O}_n) = |0|q(\mathrm{O}_n) = 0,$$

et

$$q(-M) = q((-1)M) = |-1|q(M) = q(M).$$

b) Soit (M, N) de $\mathcal{E}^2$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$q(M) = q(M + N - N) \leq q(M + N) + q(-N).$$

Comme $q(-N) = q(N)$, on a $q(M) \leq q(M + N) + q(N)$, d'où

$$q(M) - q(N) \leq q(M + N). \ (1)$$

De même on a

$$q(N) - q(M) \leq q(M + N).(2)$$

Les inégalités (1) et (2) impliquent $\boxed{|q(M) - q(N)| \leq q(M + N)}$.

c) Soit (M, N) de $\mathcal{E}^2$, supposons que $q(N) = 0$.

L'inégalité triangulaire donne :

$$q(M + N) \leq q(M) + q(N) = q(M).$$

D'après b)

$$q(M) = q(M) - q(N) \leq q(M + N).$$

Ces deux inégalités entraînent $\boxed{q(M + N) = q(M)}$.

2. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ par $f(M) = |\mathrm{Tr}(M)|$. Montrons que f est une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

- On a
- $f(\lambda M) = |\mathrm{Tr}(\lambda M)| = |\lambda \mathrm{Tr}(M)| = |\lambda||\mathrm{Tr}(M)| = |\lambda| f(M)$.
- $f(M+N) = |\mathrm{Tr}(M+N)| = |\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Tr}(N)|$. Par l'inégalité triangulaire : $|\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Tr}(N)| \leq |\mathrm{Tr}(M)|+|\mathrm{Tr}(N)|$. Donc $f(M + N) \leq f(M) + f(N)$.

f est donc une semi-norme.

Soit (M, N) de $\mathcal{E}^2$, on a

$$f(MN) = |\mathrm{Tr}(MN)| = |\mathrm{Tr}(NM)| = f(NM)$$

Donc f vérifie $(\mathcal{P})$.

On suppose que $n \geq 2$.

3. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$ telles que,

$$A = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

a) On a

$$\begin{aligned} AB &= \left(\sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \right) \left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{1,j} E_{h,1} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{i,i} E_{h,1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_h \delta_{j,h} E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_h \delta_{i,h} E_{i,1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{i,1} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{AB = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{i,1}}$.

b) On a

$$\begin{aligned} BA &= \left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \right) \\ &= \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_h E_{h,1} E_{1,j} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=2}^{n} \alpha_h E_{h,1} E_{i,i} \\ &= \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_h \delta_{1,1} E_{h,j} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=2}^{n} \alpha_h \delta_{1,i} E_{h,i} \end{aligned}$$

la deuxième somme est nulle car $\delta_{1,i} = 0$ pour tout $i \geq 2$, donc $BA = \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_h E_{h,j}$.

Ainsi $\boxed{BA = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h \left(\sum_{j=1}^{n} E_{h,j} \right)}$.

4. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.

a) Soit deux entiers distincts i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$.

On a $E_{i,j} = E_{i,i} E_{i,j}$. Par la propriété $(\mathcal{P})$,

$$q(E_{i,i} E_{i,j}) = q(E_{i,j} E_{i,i}) = q\left(\delta_{j,i} E_{i,i}\right) = \delta_{j,i} q\left(E_{i,i}\right).$$

Comme $i \neq j$, alors $\delta_{ji} = 0$, donc $q(E_{i,i}E_{i,j}) = 0$.

Ainsi, $\boxed{q(E_{i,j}) = 0 \text{ pour } i \neq j}$.

b) Par l'inégalité triangulaire :

$$q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1}E_{i,1}\right) \leq \sum_{i=2}^{n} q(m_{i,1}E_{i,1}) = \sum_{i=2}^{n} |m_{i,1}|q(E_{i,1}).$$

Pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, $i \neq 1$, donc $q(E_{i,1}) = 0$.

Alors

$$q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1}E_{i,1}\right) \leq 0$$

Comme q est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on conclut que $\boxed{q\left(\sum\limits_{i=2}^{n} m_{i,1}E_{i,1}\right) = 0}$.

c) On écrit

$$M = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{i\neq j} m_{i,j}E_{i,j}.$$

Posons $D_M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i}$ et $N = \sum\limits_{i\neq j} m_{i,j}E_{i,j}$.

On a

$$q(N) = q\left(\sum_{i\neq j} m_{i,j}E_{i,j}\right) \leq \sum_{i\neq j} |m_{i,j}|q(E_{i,j}).$$

D'après Q4.a), $q(E_{i,j}) = 0$ pour $i \neq j$, donc $q\,(N) \leq 0$,ce qui implique $q\,(N) = 0$.

D'après Q1.c), si $q(N) = 0$, alors $q(M) = q(D_M + N) = q(D)$. Donc $\boxed{q(M) = q(D_M) = q\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i}\right)}$.

d) D'après Q4.c), $q(M) = q(D_M)$ où $D_M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i}$.

De même, $q(BA) = q(D_{BA})$ où D_{BA} est la partie diagonale de BA. D'après Q3.b),

$$BA = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h \left(\sum_{j=1}^{n} E_{h,j}\right) = \sum_{h=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_h E_{h,j}.$$

La partie diagonale de BA est

$$D_{BA} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,h}.$$

Choisissons $\alpha_k = m_{k,k}$ pour $k = 1, \ldots, n$. Ce qui donne

$$D_{BA} = \sum_{h=1}^{n} m_{h,h}E_{h,h} = D_M.$$

Alors $q(D_{BA}) = q(D_M)$. Donc

$$q(BA) = q(D_{BA}) = q(D_M) = q(M)$$

Ainsi $\boxed{q(M) = q(BA) \text{ avec } \alpha_k = m_{k,k} \text{ pour } k = 1, \ldots, n}$.

e) Utilisons les matrices A et B de la question Q3, avec le choix $\alpha_k = m_{k,k}$.

D'après Q3.a),

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} m_{j,j}\right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} m_{i,i}E_{i,1} = \mathrm{Tr}(M)E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} m_{i,i}E_{i,1}.$$

D'après Q4.b) $q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,i}E_{i,1}\right) = 0$. D'après Q1.c), on a

$$q(AB) = q(\mathrm{Tr}(M)E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} m_{i,i}E_{i,1}) = q(\mathrm{Tr}(M)E_{1,1}) = |\mathrm{Tr}(M)|q(E_{1,1})$$

Donc $\boxed{q = \alpha f \text{ avec } \alpha = q(E_{1,1}) \geq 0}$.

5. Si $n = 1$, $\mathcal{E} = \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est de la forme $M = (m_{1,1}) = m_{1,1}E_{1,1}$ avec $\mathrm{Tr}(M) = m_{11}$.
Donc $f(M) = |\mathrm{Tr}(M)| = |m_{11}|$.
Soit q une semi-norme sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, alors $q(M) = q(m_{11}E_{11}) = |m_{11}|q(E_{11})$. Soit
On a $q(M) = \alpha f(M)$, avec$\alpha = q(E_{11})$. Le résultat $q = \alpha f$ reste donc valable pour $n = 1$.

PARTIE 3

Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\intercal M = \mathrm{I}_n$.

1. On considère une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Soit la matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, λ_k sont des réels positifs. Soit $U = (u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

i) On a $U \in \mathcal{O}(n)$, donc les colonnes, $C_1, \ldots, C_n$, de U, forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on a $C_j = (u_{1,j}, ..., u_{n,j})^\intercal$. On a donc pour $i \in [\![1, n]\!]$

$$|u_{i,j}| \leq \|C_j\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}^2} = 1$$

Donc $\boxed{|u_{i,j}| \leq 1, \text{ pour tout } i, j \in [\![1, n]\!]}$.

ii) On a $U = (u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $D = (\lambda_i\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Posons $DU = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors pour $i, j \in [\![1, n]\!]$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\delta_{i,k}u_{k,j} = \lambda_i u_{i,j}.$$

Donc $\boxed{DU = (\lambda_i u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}}$.

iii) On a

$$\mathrm{Tr}(DU) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{k,k}.$$

Puisque $\lambda_k \geq 0$ et $u_{k,k} \leq |u_{k,k}| \leq 1$, alors

$$\mathrm{Tr}(DU) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{k,k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{Tr}(D).$$

Donc $\boxed{\mathrm{Tr}(DU) \leq \mathrm{Tr}(D)}$.

b) Soit U une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

i) $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, S est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe donc une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}(n)$ ($P^{-1} = \ P^\intercal$) et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (dont les coefficients diagonaux a_i sont les valeurs propres de S) telles que $S = PDP^{-1} = PDP^\intercal$.
De plus, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ce qui est équivalent à Sp $(S) \subset \mathbb{R}^+$,donc les valeurs propres α_i sont positives.
(*Si V_i est un vecteur propre associé à α_i, alors* $V_i^\intercal S V_i = V_i^\intercal(\alpha_i V_i) = \alpha_i V_i^\intercal V_i = \alpha_i \|V_i\|^2 \geq 0$)

ii) Posons $V = \ P^\intercal U P$, on a $S = PDP^\intercal$. Donc

$$SU = (PDP^\intercal)U = PD(P^\intercal UP)P^\intercal = PDVP^\intercal.$$

Ainsi, $\boxed{SU = P(DV)P^\intercal}$.

iii) On a $SU = P(DV)P^\intercal$. Donc SU est semblable à DV et

$$\mathrm{Tr}(SU) = \mathrm{Tr}(DV)$$

Comme $\mathcal{O}(n)$ est un groupe et $P, U \in \mathcal{O}(n)$, alors

$$V = P^\intercal UP = P^{-1}UP \in \mathcal{O}(n)$$

de plus $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i \geq 0$.
D'après la question Q1.a)iii), $\mathrm{Tr}(DV) \leq \mathrm{Tr}(D)$.
Donc

$$\mathrm{Tr}(SU) = \mathrm{Tr}(DV) \leq \mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(S)$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Tr}(SU) \leq \mathrm{Tr}(S)}$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall U \in \mathcal{O}(n) \quad \mathrm{Tr}(AU) \leq \mathrm{Tr}(A)$$

a) i) Soit a, b, α, des réels

- Si $(a, b) = (0, 0)$, le résultat est trivial.

- Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. On peut écrire :

$$a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\alpha) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\alpha)\right).$$

Soit $x_0 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On a $x_0^2 + y_0^2 = 1$.
Donc il existe un angle φ tel que $x_0 = \cos\varphi$ et $y_0 = \sin\varphi$.
L'expression devient $\sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\cos(\alpha) + \cos\varphi\sin(\alpha)) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$.
Ainsi, il existe φ tel que $\boxed{a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)}$.

ii) Si pour tout réel α, $a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) \leq a$.
Alors $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi) \leq a$ pour tout α. En particulier, pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$, on obtient $\sqrt{a^2+b^2} \leq a$. Ceci implique que $a^2 + b^2 \leq a^2$ et $b^2 \leq 0$. Donc $b = 0$.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, $\Pi_{p,q} = \mathrm{Vect}(e_p, e_q)$.
On considère $u_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $(u_{p,q})_{|\Pi_{p,q}} = r_\alpha$ et $(u_{p,q})_{|(\Pi_{p,q})^\perp} = \mathrm{id}_{(\Pi_{p,q})^\perp}$.

i) On a la décomposition

$$\Pi_{1,2} \overset{\perp}{\oplus} (\Pi_{1,2})^{\perp} = \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{B}_{1,2} = (e_1, e_2)$ est une b.o.n de $\Pi_{1,2}$ et $\mathcal{C}_{1,2} = (e_3, e_4, \dots, e_n)$ est une b.o.n de $(\Pi_{1,2})^{\perp}$.

Par définition de $u_{1,2}$ on a :

$$Mat_{\mathcal{B}_{1,2}}\left((u_{1,2})_{|\Pi_{1,2}}\right) = Mat_{\mathcal{B}_{1,2}}(r_\alpha) = R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

et

$$Mat_{\mathcal{C}_{1,2}}\left((u_{1,2})_{|(\Pi_{1,2})^{\perp}}\right) = \mathrm{I}_{n-2}$$

Comme $\Pi_{1,2}$ et $(\Pi_{p,q})^{\perp}$ sont stable par $u_{1,2}$, alors

$$U_{1,2} = Mat_{\mathcal{B}}(u_{1,2}) = \mathrm{Diag}\left[Mat_{\mathcal{B}_{1,2}}\left((u_{1,2})_{|\Pi_{1,2}}\right), Mat_{\mathcal{C}_{1,2}}\left((u_{1,2})_{|(\Pi_{1,2})^{\perp}}\right)\right] = \mathrm{Diag}(R_\alpha, \mathrm{I}_{n-2})$$

Ainsi

$$U_{1,2} = \left(\begin{array}{c|c} R_\alpha & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

On a le produit par blocs

$$U_{1,2}^{\intercal} U_{1,2} = \left(\begin{array}{c|c} R_\alpha & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} R_\alpha & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R_\alpha R_\alpha^{\intercal} & 0 \\ \hline 0 & (\mathrm{I}_{n-2})^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_2 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{array}\right) = \mathrm{I}_n$$

Donc $U_{1,2}$ est une matrice orthogonale.

ii) On a $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, posons $U_{1,2} = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $AU_{1,2} = (c_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$.

De la forme de $U_{1,2}$ on a

$$\begin{cases} b_{1,1} = \cos(\alpha), \ b_{1,2} = -\sin(\alpha), \ b_{2,1} = \sin(\alpha), \ b_{2,2} = \cos(\alpha) \\ b_{i,i} = 1 \text{ si } i \in [\![2, n]\!] \\ b_{i,j} = 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Comme $c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$ alors

$$\mathrm{Tr}(AU_{1,2}) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

Divisons cette somme suivant $i = k$ et $i \neq k$

$$\mathrm{Tr}(AU_{1,2}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} b_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

La première somme vaut

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} b_{i,i} = \cos(\alpha)\, a_{1,1} + \cos(\alpha)\, a_{2,2} + \sum_{i=3}^{n} a_{i,i}$$

Dans la deuxième somme, on distingue les cas $i = 1, 2$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{n} a_{1,k} b_{k,1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{n} a_{2,k} b_{k,2} + \sum_{i=3}^{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

on a

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{n} a_{1,k}b_{k,1} = a_{1,2}b_{2,1} + \sum_{k=3}^{n} a_{1,k}b_{k,1} \text{ et } \sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{n} a_{2,k}b_{k,2} = a_{2,1}b_{1,2} + \sum_{k=3}^{n} a_{2,k}b_{k,2}.$$

comme $b_{2,1} = \sin(\alpha)$, $b_{1,2} = -\sin(\alpha)$ et $b_{k,1} = b_{k,2} = 0$ pour $k \in [\![3, n]\!]$ alors

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{n} a_{1,k}b_{k,1} = \sin(\alpha)\, a_{1,2} \text{ et } \sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{n} a_{2,k}b_{k,2} = -\sin(\alpha)\, a_{2,1}.$$

De même $b_{k,i} = 0$ pour $i \in [\![3, n]\!]$ et $k \neq i$ donc

$$\sum_{i=3}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = 0$$

Ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sin(\alpha)\, a_{1,2} - \sin(\alpha)\, a_{2,1}.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Tr}(AU_{1,2}) = (a_{1,1} + a_{2,2})\cos(\alpha) + (a_{1,2} - a_{2,1})\sin(\alpha) + \sum_{i=3}^{n} a_{i,i}}$.

On peut écrire aussi $\boxed{\mathrm{Tr}(AU_{1,2}) = (a_{1,1} + a_{2,2})(\cos(\alpha) - 1) + (a_{1,2} - a_{2,1})\sin(\alpha) + \mathrm{Tr}(A)}$.

iii) On a $\forall U \quad \mathrm{Tr}(AU) \leq \mathrm{Tr}(A)$ et $U_{1,2} \in \mathcal{O}(n)$ pour tout α dans $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{Tr}(AU_{1,2}) \leq \mathrm{Tr}(A)$. Ce qui donne pour tout α dans $\mathbb{R}$

$$(a_{1,1} + a_{2,2})\cos(\alpha) + (a_{1,2} - a_{2,1})\sin(\alpha) \leq (a_{1,1} + a_{2,2})$$

d'après Q2.a on a $a_{1,2} = a_{2,1}$.

iv) Soit p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, posons $U_{p,q} = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
On a

$$\begin{aligned} u_{p,q}(e_p) &= \cos(\alpha)\, e_p + \sin(\alpha)\, e_q, \\ u_{p,q}(e_q) &= -\sin(\alpha)\, e_p + \cos(\alpha)\, e_q \\ u_{p,q}(e_k) &= e_k \text{ si } k \notin \{p, q\} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} b_{p,p} &= \cos(\alpha), b_{p,q} = -\sin(\alpha), b_{q,p} = \sin(\alpha), b_{q,q} = \cos(\alpha), \\ b_{k,k} &= 1 \text{ si } k \notin \{p, q\} \\ b_{i,j} &= 0 \text{ si } i, j \notin \{p, q\} \text{ et } i \neq j \end{aligned}$$

Ainsi $U_{p,q}$ est de la forme

$$U_{p,q} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} & \text{\Large 0} & \text{\Large 0} \\ \hline \text{\Large 0} & \begin{matrix} \cos(\alpha) & 0 & \dots & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \dots & 0 & \cos(\alpha) \end{matrix} & \text{\Large 0} \\ \hline \text{\Large 0} & \text{\Large 0} & \begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

v) Par un raisonnement similaire à 2.b)ii), on trouve

$$\mathrm{Tr}(AU_{p,q}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\notin\{p,q\}}}^{n} a_{k,k} + (a_{p,p} + a_{q,q})\cos(\alpha) + (a_{p,q} - a_{q,p})\sin(\alpha).$$

vi) L'hypothèse $\mathrm{Tr}(AU_{p,q}) \leq \mathrm{Tr}(A)$ donne :

$$(a_{p,p} + a_{q,q})\cos(\alpha) + (a_{p,q} - a_{q,p})\sin(\alpha) \leq a_{p,p} + a_{q,q}$$

Comme en Q2.b)iii), cette inégalité, valable pour tout α, donc $a_{p,q} - a_{q,p} = 0$, soit $a_{p,q} = a_{q,p}$. Ceci est vrai pour tous $p < q$ donc vrai pour tout p, q. Ainsi, A est une matrice symétrique.

c) i) A est une matrice symétrique réelle. L'endomorphisme g canoniquement associé à A (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, supposée orthonormée) est donc un endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint).
Le théorème spectral affirme que g est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
Soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ une telle base, et γ_i les valeurs propres associées : $g(v_i) = \gamma_i v_i$.

ii) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On considère l'endomorphisme w_j de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$w_j(v_k) = \begin{cases} -v_j \text{ si } k = j \\ v_k \text{ si } k \in [\![1, n]\!] \text{ et } k \neq j \end{cases}$$

- La matrice de w_j dans la base $\mathcal{V}$ est

$$\Delta_j = \mathrm{Diag}(1, \dots, -1, \dots, 1)$$

donc w_j est une réflexion (*la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à* v_j).
Donc la matrice W_j de w_j relativement à la base $\mathcal{B}$ est $W_j = P\Delta_j P^{-1}$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{V}$ (*qui sont deux bases orthonormées*) donc P est une matrice orthogonale et $P^{-1} = P^\intercal$.
Ainsi

$$W_j = P\Delta_j P^\intercal = P\mathrm{Diag}(1, \dots, -1, \dots, 1)P^\intercal$$

W_j est donc une matrice orthogonale.

- La matrice de g dans la base $\mathcal{V}$ est $D_A = \mathrm{Diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Donc $A = PD_AP^\intercal$ et $AW_j = P(D_A\Delta_j)P^\intercal$, avec

$$D_A\Delta_j = \mathrm{Diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}, -\gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n).$$

Ce qui donne

$$\mathrm{Tr}(AW_j) = \mathrm{Tr}(D_A\Delta_j) = -\gamma_j + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \gamma_k$$

et on a $\mathrm{Tr}(D_A\Delta_j) = \sum_{k\neq j} \gamma_k - \gamma_j$.

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D_A) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \gamma_j + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \gamma_k.$$

On en déduit $\boxed{\mathrm{Tr}(AW_j) = \mathrm{Tr}(A) - 2\gamma_j}$.

- On a $W_j \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, l'hypothèse $\mathrm{Tr}(AW_j) \leq \mathrm{Tr}(A)$ donne $\mathrm{Tr}(A) - 2\gamma_j \leq \mathrm{Tr}(A)$, donc $-2\gamma_j \leq 0$,ce qui implique $\gamma_j \geq 0$.

d) On sait qu'une matrice symétrique réelle est positive (c'est-à-dire dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Nous avons montré que A est symétrique (d'après Q2.b)vi)) et toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles (d'après Q2.c)ii)), donc.

Ainsi on a montré que : $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall U \in \mathcal{O}(n) \quad \mathrm{Tr}(AU) \leq \mathrm{Tr}(A)}$.

FIN