

Devoir Maison : Matrices

Soit p un réel fixé de l'intervalle $]0; 1[: 0 < p < 1$.

On définit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$$

Partie 1

1. Calculer A^2 . Que vaut A^0 ?
2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$$

Pour cela, on utilisera la relation $A^{n+1} = A^n A$ et on exhibera les expressions a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (obtenues en cours de la preuve).

3. La suite $(c_n)_n$ ainsi construite est une suite "classique" : de quel type est-elle ?
En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Étude de la suite $(a_n)_n$.

(a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = 0$$

(b) Exprimer a_n en fonction de n .

5. On pose la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU = U$.

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | MU = U\}$$

(a) Soit la proposition $\mathcal{P} : "M \in \mathcal{C}, N \in \mathcal{C} \Rightarrow M + N \in \mathcal{C}"$, cette proposition est-elle vraie ?

(b) Montrer :

$$M \in \mathcal{C}, N \in \mathcal{C} \Rightarrow MN \in \mathcal{C}$$

(c) On pose $T = {}^t A$, la transposée de la matrice A .

Montrer que $T \in \mathcal{C}$ puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n \in \mathcal{C}$.

(d) Quelle égalité a-t-on entre T^n et A^n ?

(e) En déduire, connaissant une expression de a_n , que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$$

Partie 2

On définit les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On souhaite calculer A^n d'une autre façon. On définit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calculer $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
3. En déduire une expression de B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer C^2 .
5. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction des puissances des matrices de B et C .
6. Retrouver A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

1. $A^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p^2 & 0 \\ (1-p)^2 & 1-p^2 & 1 \end{pmatrix}$. $A^0 = I_3$.

2. On procède par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 0$, le résultat est trivial avec $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ car $A^0 = I_3$.

Hérédité : Soit n tel que la propriété est vraie. Montrons le pour $n + 1$.

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ pa_n + p^n(1-p) & p^{n+1} & 0 \\ pb_n + (1-p)c_n & pc_n + 1-p & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat est donc vrai en posant $a_{n+1} = pa_n + p^n(1-p)$, $b_{n+1} = pb_n + (1-p)c_n$ et $c_{n+1} = pc_n + 1-p$.

3. $(c_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique donc, pour tout n , $c_n = p^n(0-1) + 1 = 1 - p^n$.

4. (a) Pour tout n , $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2a_n = pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) - 2pa_{n+1} + p^2a_n = -pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) + p^2a_n = -p^2a_n - p^{n+1}(1-p) + p^{n+1}(1-p) + p^2a_n = 0$

(b) On a donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, l'équation caractéristique est $x^2 - 2px + p^2 = 0$ qui admet pour unique solution double p . Donc, pour tout n , $a_n = (\lambda n + \mu)p^n$ or $a_0 = 0$ donc $\mu = 0$ et $a_1 = 1 - p$ donc $\lambda = \frac{1-p}{p}$ et finalement, $a_n = np^{n-1}(1-p)$.

5. (a) On a $MU = U$ et $NU = U$ donc $(M + N)U = MU + NU = U + U = 2U$ donc la proposition est fausse.

(b) $(MN)U = M(NU) = MU = U$ donc $MN \in \mathcal{C}$

(c) $T = {}^tA = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $TU = \begin{pmatrix} p+1-p \\ p+1-p \\ 1 \end{pmatrix} = U$. D'après la question précédente, $T^2 = T \times T \in \mathcal{C}$ et donc par récurrence, $T^n \in \mathcal{C}$.

(d) $T^n = {}^t(A^n)$.

(e) D'après les deux questions précédentes, $T^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^n U = U$ donc $p^n + a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - p^n - a_n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$.

6. (a) On effectue $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et P est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ pour obtenir $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est clairement inversible car les trois coefficients de la diagonale sont non nuls (et c'est une matrice triangulaire supérieure). En effectuant les mêmes transformations, on résout $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On

obtient $z = a + b + c$, $y = -b$ et $x = a + b$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $BP = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est diagonale.

(c) $B = PDP^{-1}$, $B^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & (-p)^n & 0 \\ 0 & -(-p)^n & 0 \\ -p^n & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & p^n - (-p)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-p)^n & 0 \\ 1 - p^n & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$

(d) $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Remarquons que $BC = CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 0 & 0 \\ -p(1-p) & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc on peut appliquer le binôme de Newton,

$$A^n = (C + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C^k B^{n-k} = B^n + nCB^{n-1}$$

(f) $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ np^{n-1}(1-p) & p^n & 0 \\ 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$.