

Devoir Maison : Réduction

Diagonalisation Simultanée & Decomposition de Dunford

Niveau II: Inspiré du CCP 2021

Partie I: Diagonalisation Simultanée

on se propose de montrer dans cette partie le résultat suivant : $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

si $A, B \in M_n(K)$ sont diagonalisables
 or $AB = BA$
 Alors $\exists P \in GL_n(K)$, D et Δ matrice diagonales
 tq $A = PDP^{-1}$
 $B = P\Delta P^{-1}$

pour cela on considère E un K -ev tq $\dim E = n$

on fixe β une base de E et on considère

$u, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $\boxed{A = \underset{\beta}{M}(u) \text{ et } B = \underset{\beta}{M}(v)} \quad \text{tq } \boxed{u \circ v = v \circ u}$

- 1) Cas particulier : on suppose ici que $\chi_u(X)$ est scindé à racine simple et que $u \circ v = v \circ u$
 on pose $\text{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tq $\lambda_i \neq \lambda_j$
 et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base propre associée
 cas $u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$

(1)

i) Dire pourquoi u est diagonalisable et donner $M(u) = D$

ii) Justifier que $A = PDP^{-1}$ où $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}$

iii) Dire pourquoi $\dim E_{\lambda_i}(u) = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$

iv) que représente $\{e_i\}$ pour $E_{\lambda_i}(u)$

v) Dire pourquoi $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v

vi) En deduire que $\forall 1 \leq i \leq n, \exists \alpha_i \in K$ tq $v(e_i) = \alpha_i e_i$

vii) En deduire que v est diagonalisable et que

$$B = P \Delta P^{-1} \quad \text{où} \quad \Delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

viii) Conclure

2) Cas glc : On suppose ici que : u et v diagonalisable
et que $u \circ v = v \circ u$

on pose $\text{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ tq $\lambda_i \neq \lambda_j$

i) Dire pourquoi $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v , $\forall 1 \leq i \leq r$

ii) Justifier que $v|_{E_{\lambda_i}(u)}$ est ~~stable~~ diagonalisable

iii) En deduire que $\exists e_i$ base de $E_{\lambda_i}(u)$ tq

$$M(v|_{E_{\lambda_i}(u)}) = \Delta_i \text{ est diagonale}$$

iv) Dire pourquoi $M(u|_{E_{\lambda_i}(u)}) = \lambda_i I$

v) On pose $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^r E_{\lambda_i}$. Dire pourquoi

• $\mathcal{E}$ base de E

• $M(u) = D$ est diagonale

• $M(v) = \Delta$ est diagonale

vii) Conclure

(2)

3) Une application

i) Soit $A, B \in M_n(K)$ diagonalisable tq $AB = BA$
 Mg $A+B$ et AB sont diagonalisable

ii) Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 sont diagonalisable mais $A+B$ ne l'est pas

iii) Que peut-on conclure

Partie II : Décomposition de Dunford (Existence)

On se propose de montrer le résultat suivant

$\forall A \in M_n(K)$, il existe D matrice diagonalisable
 tq $\chi_A(x)$ scinde " " N " nilpotente

$$\text{tq } \begin{cases} A = D + N \\ DN = ND \\ \chi_A(x) = \chi_D(x) \\ D \text{ est un polynôme en } A \end{cases}$$

On utilise les notations de I et on pose $A = M_{\mathcal{B}}(u)$

et on pose $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{d_i}$ tq $\lambda_i \neq \lambda_j$

et $F_i = \text{Ker} (u - \lambda_i \text{id}_E)^{d_i}$

1) Dire pourquoi les F_i sont tous stables par u

2) " " $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$

3) Soit $\mathcal{E}_i$ une base de F_i , Justifier que $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{E}_i$
 est une base de E

(3)

4) Donner la forme de $M(u)$

5) $M(u - \lambda_i \text{id}_E) / F_i$ est nilpotente

6) En deduire que $M(u / F_i) = \lambda_i \cdot I + N_i$
tq N_i nilpotente

indice: $u = \lambda_i \text{id}_E + (u - \lambda_i \text{id}_E)$

7) On pose $M = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_r \end{pmatrix}$ Justifier que N est nilpotente

8) En deduire que $M(u) = D + M$ tq
 D diagonale
 M nilpotente
et $DM = MD$

et que $\chi_u(x) = \chi_D(x)$

9) Conclure que $\left\{ \begin{array}{l} A = M(u) = D + N \text{ tq} \\ B \quad D \text{ diagonalisable} \\ \quad N \text{ nilpotente, } DM = MD \\ \quad \chi_A(x) = \chi_D(x) \end{array} \right.$

Partie III: On se propose de montrer ici que D
est un polynôme en A c'est-à-dire $\exists P \in K[X]$
tq $D = P(A)$

1) Cas particulier: on suppose ici que $r = 2$

et $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2}$

on pose $R(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1}$ et $S(x) = (x - \lambda_2)^{\alpha_2}$

(4)

i) Justifier que $R \wedge S = 1$

ii) En deduire $\exists U, V \in K(x)$ tq $UR + VS = 1$

iii) " " $\forall x \in E$, $x = x_2 + x_1$ tq

$$x_2 = (UR)(x) \in F_2 = \text{Ker}(\mu - \lambda_2 \text{id})^{d_2}$$

$$x_1 = (VS)(x) \in F_1 = \text{Ker}(\mu - \lambda_1 \text{id})^{d_1}$$

iv) Selon II.8 $\Delta = M(V) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 \\ 0 & \lambda_2 I \end{pmatrix}$

où v est diagonalisable

dire pourquoi $v(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

en deduire que $\exists Q \in K(x)$ tq $v = Q(u)$

" " " tq $\Delta = Q(M(u))$

" " " tq $D = Q(A)$

2) Comment traiter le cas gte

Partie IV Décomposition de Dunford (Unicité)

on suppose que il existe D' diagonalisable

" " N' nilpotente

$$\text{tq } A = D' + N' \text{ et } D'N' = N'D'$$

1) Justifier $D - D' = N' - N$

D et N m dans II et III

2) Justifier que $D'A = AD'$ puisque $DD' = D'D$

indice : utiliser III

3) En deduire que $D - D'$ est diagonalisable

indice : utiliser I.3

4) Mq $NN' = N'N$ puis que $N' - N$ est nilpotente

5) En deduire $D = D'$ et $N = N'$ puis conclure

(5)

FIN