

Devoir Maison : Réduction

Exercice 1 (CCINP 2025)

Dans cette partie, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

- Q19.** On note $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A . Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.
- Q20.** Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \text{Tr}(A)A$.
- Q21.** Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.
- Q22.** Établir que : A est diagonalisable $\Leftrightarrow \text{Tr}(A) \neq 0$.

On note désormais u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A .

- Q23.** On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
 Justifier que $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

- Q24.** On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
 Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

- Q25.** Conclure que dans $M_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

Exercice 2 (e3a 2025)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On note $E_{n-1} = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ le \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et à coefficients dans \mathbb{C} .

On note $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1})$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_k(X) = X^k$, la base canonique de E_{n-1} .

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note φ_α l'endomorphisme de E_{n-1} qui à tout polynôme P , associe :

$$\varphi_\alpha(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} P(\alpha^q) X^q$$

Soit A_α la matrice de l'endomorphisme φ_α dans la base canonique \mathcal{B} de E_{n-1} .

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On rappelle que $\omega^n = 1$ et que $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \frac{1}{\omega}$.

1. Déterminer, suivant la valeur de l'entier relatif m , la somme : $\sigma_m = \sum_{r=1}^n \omega^{m(r-1)}$.

On note $A_\omega = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ la matrice associée à l'endomorphisme φ_ω dans la base \mathcal{B} de E_{n-1} .

2. Écrire la matrice A_ω dans le cas où $n = 3$. On utilisera le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

3. Démontrer que, pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a : $a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

4. La matrice A_ω est-elle symétrique ? Peut-on affirmer qu'elle est diagonalisable ?

5. Calculer $A_\omega \times A_{\bar{\omega}}$. En déduire que A_ω est inversible et déterminer son inverse.

6. Déterminer alors un nombre complexe α tel que : $\varphi_\omega^{-1} = \varphi_\alpha$.

7. Calculer $(A_\omega)^2$ puis vérifier que $(A_\omega)^4 = I_n$.

8. La matrice A_ω est-elle diagonalisable ?

On note, pour $q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L_q(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega^q}$. En particulier, $L_0(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

9. Déterminer les valeurs propres possibles de φ_ω .

10. Exprimer les n racines du polynôme $X^n - 1$ à l'aide de puissances de ω .

11. En déduire que : $\forall q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L_q \in E_{n-1}$.

On pose $H_0 = \text{Vect}(Q_0, L_0)$ et on admet que (Q_0, L_0) en est une base.

12. Vérifier que H_0 est stable par φ_ω .

13. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par φ_ω sur H_0 dans la base (Q_0, L_0) .

14. En déduire :

— un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega - \text{Id}_{E_{n-1}})$,

— un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega + \text{Id}_{E_{n-1}})$.

15. Dans le cas $n = 3$, déterminer le spectre de A_ω .

16. Dans le cas $n = 4$, déterminer les valeurs propres de A_ω .

17. Déterminer les valeurs propres de la matrice
- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose à présent $n \geq 5$.

18. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est de dimension 4 et est stable par φ_ω .

19. Déterminer le spectre de φ_ω .

Corrigé

Exercice 1 (CCINP 2025)

Q19. L'image de la matrice A est le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes C_1, \dots, C_n de A , et le rang de A est la dimension de $\text{Im}(A)$; comme $\text{rg}(A) = 1$, $\text{Im}(A) \neq \{0_{n,1}\}$ donc au moins une des colonnes de A est non nulle : cela justifie l'existence d'un (plus petit) $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C = C_k \neq 0_{n,1}$. De plus, $\text{Vect}(C) \subseteq \text{Im}(A)$ et $\dim(\text{Vect}(C)) = 1 = \text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$, donc $\text{Vect}(C) = \text{Im}(A)$; il en suit que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $C_j \in \text{Im}(A) = \text{Vect}(C)$ donc il existe un réel x_j tel que $C_j = x_j C$; en particulier $C = C_k = x_k C$ avec $C \neq 0_{n,1}$ donc $x_k = 1$. En notant $L = (x_1 \ \dots \ x_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, L est une matrice ligne non nulle telle que $A = C \times L$ comme voulu.

Q20. En assimilant la matrice $L \times C \in M_1(\mathbb{R})$ à son unique élément et en utilisant les propriétés de la trace on obtient

$$L \times C = \text{Tr}(L \times C) = \text{Tr}(C \times L) \quad \text{donc} \quad \boxed{L \times C = \text{Tr}(A)}$$

(en explicitant les coefficients de L et C , $L = (x_1 \ \dots \ x_n)$ et $C = (y_1 \ \dots \ y_n)^\top$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de $A = C \times L$ est égal à $y_i x_i$, donc $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i = L \times C$).

Par associativité de la multiplication matricielle,

$$A^2 = (C \times L)^2 = C \times (L \times C) \times L = \text{Tr}(A) (C \times L) = \text{Tr}(A) A \quad \text{comme voulu.}$$

Q21. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A) = n - 1 > 0$; il en suit que 0 est une valeur propre de A d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à $n - 1$, donc X^{n-1} divise le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A . D'après les propriétés générales du polynôme caractéristique, on sait χ_A est un polynôme unitaire de degré n et que le coefficient de son terme de degré $n - 1$ est égal à $-\text{Tr}(A)$; ainsi

$$\boxed{\chi_A(X) = (X - \text{Tr}(A))X^{n-1}}$$

D'après **Q20.**, $X^2 - \text{Tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de A , donc le polynôme minimal π_A de A est un diviseur unitaire de ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$; comme $0 < \text{rg}(A) = 1 < n$, A n'est pas un multiple scalaire de la matrice identité I_n , donc π_A est de degré strictement supérieur à 1. On déduit que

$$\boxed{\pi_A(X) = (X - \text{Tr}(A))X}$$

Q22. La matrice A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$; d'après **Q21.**, π_A est scindé, et il est à racines simples si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$.

Q23. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$; l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n ne peut pas être vide, donc $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$ contient au moins un vecteur non nul, on note ϵ_2 un tel vecteur et on fixe un vecteur $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\epsilon_2 = u(\epsilon_1)$. Le sous-espace vectoriel engendré par ϵ_2 est inclus dans le sous-espace vectoriel $\text{Im}(u)$ et $\dim(\text{Vect}(\epsilon_2)) = 1$, d'autre part $\dim(\text{Im}(u)) = \text{rg}(A) = 1$ aussi, donc $\text{Vect}(\epsilon_2) = \text{Im}(u)$; $\text{Vect}(\epsilon_2)$ est également inclus dans $\text{Ker}(u)$, et on en déduit que $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$.

D'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(u)) = n - \text{rg}(u) = n - 1$; ϵ_2 est un vecteur non nul de $\text{Ker}(u)$, donc d'après le théorème de la base incomplète il existe des vecteurs $\epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ tels que $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ est une base de $\text{Ker}(u)$. On considère la famille $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$, et une famille $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad \text{En appliquant l'endomorphisme } u \text{ on obtient } 0_{\mathbb{R}^n} = u\left(\sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i\right) = a_1 u(\epsilon_1) + \sum_{i=2}^n a_i \underbrace{u(\epsilon_i)}_{=0_{\mathbb{R}^n}} = a_1 \epsilon_2$$

et comme ϵ_2 n'est pas le vecteur nul on déduit que $a_1 = 0$; la sous-famille $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ est une base de $\text{Ker}(u)$ donc elle est libre, par conséquent $a_2 = \dots = a_n = 0$. Cela établit que \mathcal{B} est une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^n , de cardinal égal à $n = \dim(\mathbb{R}^n)$: ainsi \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n . Comme $u(\epsilon_1) = \epsilon_2$ et $u(\epsilon_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la matrice de u dans la base \mathcal{B} est celle de l'énoncé.

Q24. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, autrement dit $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n en somme directe. D'après le théorème du rang $\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathbb{R}^n = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$. Soit $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ une base de \mathbb{R}^n adaptée à cette décomposition en somme directe : on a $\dim(\text{Im}(u)) = \text{rg}(A) = 1$ donc $\text{Im}(u) = \text{Vect}(\epsilon_1)$; en particulier $u(\epsilon_1) \in \text{Im}(u)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(\epsilon_1) = a\epsilon_1$. Les autres vecteurs $\epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ appartiennent tous à $\text{Ker}(u)$, donc $u(\epsilon_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Il en résulte que la matrice de u dans la base \mathcal{B} est celle de l'énoncé; cette matrice doit être de rang égal à $\text{rg}(u) = 1$, donc $a \neq 0$.

Q25. D'une part, en général deux matrices semblables ont la même trace.

Soit A une matrice de rang 1; puisque les matrices d'un même endomorphisme de \mathbb{R}^n par rapport à deux bases de \mathbb{R}^n sont semblables, d'après **Q23.** et **Q24.**, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la matrice A appartient à la classe de similitude de la matrice M_a , où

$$M_0 = \text{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0_{n-2}\right) \quad \text{et} \quad \forall a \in \mathbb{R}^* \quad M_a = \text{Diag}(a, 0_{n-1}).$$

Or on constate que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $a = \text{Tr}(M_a)$; il en suit que toute matrice A de rang 1 est semblable à la matrice $M_{\text{Tr}(A)}$. Par transitivité et symétrie de la relation de similitude, deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 ayant la même trace sont semblables.

Exercice 2 (e3a 2025)

Soit A_α la matrice de l'endomorphisme φ_α dans la base canonique \mathcal{B} de E_{n-1} . Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On rappelle que $\omega^n = 1$ et que $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \frac{1}{\omega}$.

1. Déterminer, suivant la valeur de l'entier relatif m , la somme : $\sigma_m = \sum_{r=1}^n \omega^{m(r-1)}$.

Solution: On reconnaît une somme géométrique de raison ω^m .

Si $n|m$, alors $\omega^m = 1$ et $\sigma_m = n$.

Si n ne divise pas m , alors, $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$ donc $\frac{2im\pi}{n} \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ et ainsi, $\sigma^m \neq 1$. On a donc $\sigma_m = \frac{1-\omega^{mn}}{1-\omega^m} = 0$.

On note $A_\omega = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ la matrice associée à l'endomorphisme φ_ω dans la base \mathcal{B} de E_{n-1} .

2. Écrire la matrice A_ω dans le cas où $n = 3$. On utilisera le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Solution: On a ici $\omega = j$ et $\phi_\omega : P \in \mathbb{C}_2[X] \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}(P(1) + P(j)X + P(j^2)X^2)$.

Ainsi

$$A_\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

3. Démontrer que, pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a : $a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

Solution: Dans le cas général, on a $\phi_\omega : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}(P(1) + P(\omega)X + \dots + P(\omega^{n-1})X^{n-1})$.

En particulier, pour $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\phi_\omega(X^{\ell-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\omega^{k-1})^{\ell-1} X^{k-1}$.

On obtient donc bien l'expression $a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

4. La matrice A_ω est-elle symétrique? Peut-on affirmer qu'elle est diagonalisable?

Solution: D'après l'expression précédente, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_{k,\ell} = a_{\ell,k}$ ce qui prouve que A_ω est symétrique.

A_ω n'étant pas à coefficients réels, on ne peut pas appliquer le théorème spectral et affirmer qu'elle est diagonalisable.

5. Calculer $A_\omega \times A_{\bar{\omega}}$. En déduire que A_ω est inversible et déterminer son inverse.

Solution: Par formule du produit matrice, si $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient (k, ℓ) de $A_\omega \times A_{\bar{\omega}}$ est

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \omega^{(k-1)(p-1)} \omega^{-(p-1)(\ell-1)}$$

ie

$$\frac{1}{n} \sigma_{k-\ell}$$

A l'aide de la question 1, on obtient donc $A_\omega \times A_{\bar{\omega}} = I_n$.

Cela montre que A_ω est inversible et qu'on a $A_\omega^{-1} = A_{\bar{\omega}}$.

6. Déterminer alors un nombre complexe α tel que : $\varphi_\omega^{-1} = \varphi_\alpha$.

Solution: D'après ce qui précède, on peut choisir $\alpha = \bar{\omega}$.

7. Calculer $(A_\omega)^2$ puis vérifier que $(A_\omega)^4 = I_n$.

Solution:

En reprenant le calcul de la question 5, on obtient que le coefficient (k, ℓ) de A_ω^2 est $\frac{1}{n}\sigma_{k+\ell-2}$. Ainsi

$$A_\omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & 1 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$

puis $A_\omega^4 = I_n$.

8. La matrice A_ω est-elle diagonalisable ?

Solution: $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A_ω qui est simplement scindé puisque égal à $(X - 1)(X - i)(X + 1)(X + i)$. On peut donc affirmer que A_ω est diagonalisable.

Éléments propres de φ_ω

On note, pour $q \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $L_q(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega^q}$. En particulier, $L_0(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

9. Déterminer les valeurs propres possibles de φ_ω .

Solution: Comme $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de ϕ_ω , les valeurs propres de ϕ_ω sont incluses dans $\{1, i, -1, -i\}$ (qui est l'ensemble des racines de $X^4 - 1$).

10. Exprimer les n racines du polynôme $X^n - 1$ à l'aide de puissances de ω .

Solution: D'après le cours, ce sont les ω^k avec $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ et il y en a n distinctes.

11. En déduire que : $\forall q \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, L_q \in E_{n-1}$.

Solution: On a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$ puisque est de degré n et a n racines distinctes d'après ce qui précède. Ainsi, $L_q = \prod_{k=0, k \neq q}^{n-1} (X - \omega^k)$. C'est bien un polynôme complexe de degré $\leq n - 1$.

On pose $H_0 = \text{Vect}(Q_0, L_0)$ et on admet que (Q_0, L_0) en est une base.

12. Vérifier que H_0 est stable par φ_ω .

Solution: On a $\phi_\omega(H_0) = \text{Vect}(\phi_\omega(Q_0), \phi_\omega(L_0))$.

Or, $\phi_\omega(Q_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0$ et $\phi_\omega(L_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} L_0(\omega^k) X^k$. Or, les racines de L_0 sont $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ donc $\phi_\omega(L_0) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} Q_0$.

Finalement, $\phi_\omega(H_0) = \text{Vect}(\frac{1}{\sqrt{n}} L_0, \sqrt{n} Q_0) = H_0$.

13. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par φ_ω sur H_0 dans la base (Q_0, L_0) .

Solution: D'après la question précédente, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix}$$

14. En déduire :

- un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega - \text{Id}_{E_{n-1}})$,
- un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega + \text{Id}_{E_{n-1}})$.

Solution: Des calculs précédents, on obtient $\phi_\omega(\sqrt{n}Q_0 - L_0) = L_0 - \sqrt{n}Q_0$: on a donc $\sqrt{n}Q_0 - L_0 \in \text{ker}(\phi_\omega + \text{Id}_{E_{n-1}})$.

De même, $\sqrt{n}Q_0 + L_0 \in \text{ker}(\phi_\omega - \text{Id}_{E_{n-1}})$.

15. Dans le cas $n = 3$, déterminer le spectre de A_ω .

Solution: D'après ce qui précède, on a déjà 1 et -1 valeurs propres de A_ω . On travaille dans \mathbb{C} donc A_ω a trois valeurs propres comptées avec multiplicité : soit c la troisième valeur propre. On a $-1 + 1 + c = \text{Tr}(A_\omega)$ donc $c = i$.

Finalement,

$$\text{Sp}(A_\omega) = \{-1, 1, i\}$$

16. Dans le cas $n = 4$, déterminer les valeurs propres de A_ω .

Solution: On sait déjà que -1 et 1 sont valeurs propres de A_ω . Comme dans la question précédente, notons c et d les deux valeurs propres manquantes.

On a $\{c, d\} \in \{-1, 1, i, -i\}$ et $-1 + 1 + c + d = \text{tr}(A_\omega) = \frac{1}{2}(1 + \omega + \omega^4 + \omega^9)$. Mais ici $\omega = i$ donc $1 + \omega + \omega^4 + \omega^9 = 1 + i + 1 + i$ et finalement, $c + d = 1 + i$.

Nécessairement, on a $\{c, d\} = \{1, i\}$.

Finalement,

$$\text{Sp}(A_\omega) = \{-1, 1, i\}$$

17. Déterminer les valeurs propres de la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution: Le polynôme caractéristique est $X^4 - 1$ donc les valeurs propres de cette matrices sont $-1, 1, i$ et $-i$.

On suppose à présent $n \geq 5$.

18. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est de dimension 4 et est stable par φ_ω .

Solution: Pour montrer que G est de dimension 4, montrons la liberté de $(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$: soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $aQ_1 + bQ_{n-1} + cL_1 + dL_{n-1} = 0$ (*). 1 et ω^2 sont racines de L_1 et L_{n-1} donc, en évaluant (*) en ces valeurs on obtient $a + b = 0$ et $a\omega^2 + b\omega^{2n-2} = 0$. On a $\omega^2 \neq \omega^{2n-2}$ (puisque sinon on aurait $\omega^{2n-4} = 1$ donc $2n - 4 = n$ donc $n = 4$) et ainsi on peut conclure que $a = b = 0$.

On peut ensuite évaluer (*) en ω pour obtenir $d = 0$ et enfin $c = 0$.

Montrons maintenant que G est stable par ϕ_ω : on a $\phi_\omega(G) = \text{Vect}(\phi_\omega(Q_1), \phi_\omega(Q_{n-1}), \phi_\omega(L_1), \phi_\omega(L_{n-1}))$ et $\phi_\omega(Q_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k X^k = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0(\omega X) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{X - 1} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{X - \omega^{n-1}} = \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} L_{n-1}$.

De même, $\phi_\omega(Q_{n-1}) = \frac{\omega}{\sqrt{n}} L_1$, puis $\phi_\omega(L_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_1(\omega) X$ avec $L_1(\omega) = \prod_{k=0, k \neq 1}^{n-1} (\omega - \omega^k) = \omega^{n-1} \prod_{k=0, k \neq 1}^{n-1} (1 - \omega^{k-1}) = \frac{1}{\omega} L_0(\omega) = \frac{n}{\omega}$. Ainsi, $\phi_\omega(L_1) = \frac{\sqrt{n}}{\omega} Q_1$.

Et enfin, $\phi_\omega(L_{n-1}) = \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} Q_{n-1}$.

On a donc bien montré que G est stable par ϕ_ω .

19. Déterminer le spectre de φ_ω .

Solution: La matrice de la restriction de ϕ_ω à G est celle de la question 17. Le spectre de ϕ_ω contient donc $\{1, -1, i, -i\}$. Par ailleurs, par 9, il y est inclus: on conclut que le spectre de ϕ_ω est exactement $\{-1, 1, i, -i\}$.