My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison

Suites & Séries de Fonctions

e3a 2025

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

*****

On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

2. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

5. Prouver que pour tout réel positif x, $f'(x) \leq e^x$.

6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x,y)$. Prouver que l'on a : $|f(x)-f(y)| \leqslant e^z |x-y|$.

7. Prouver que l'on a : $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2}\,dt$.

8. Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

9. Étudier le signe de g sur $]0,+\infty[$.

10. Montrer que : $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$.

11. Prouver que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) > 1 + t$.

12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(1+X)^2}$.

14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$g(x) \leqslant \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0,+\infty[$.

Corrigé

2. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Solution: On utilise le critère de d'ALEMBERT pour déterminer le rayon de convergence de cette série entière : $\frac{\frac{1}{(n+1)!^2}}{\frac{1}{n!^2}} = \frac{1}{(n+1)^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ donc $R = +\infty$ et cela montre que f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Solution: Par propriété du cours, la somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence (qui est $\mathbb{R}$) ici.

4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Solution: Sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc f' y est bornée (par le théorème des bornes atteintes) et par corollaire du théorème des accroissements finis, elle est lipschitzienne.

5. Prouver que pour tout réel positif $x, f'(x) \leq \mathrm{e}^x$.

Solution: Soit $x \geq 0$. Par propriété du cours, on a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!^2} x^n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{(n+1)!^2} \leq \frac{1}{n!}$ et donc finalement, $f'(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ie $f'(x) \leq e^x$.

6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x, y)$. Prouver que l'on a: $|f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{e}^z |x - y|$.

Solution: Pour tout $t \in [x, y]$ (ou $[y, x]$) on a $|f'(t)| \leq e^z$, donc, par corollaire du théorème des accroissements finis, $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.

7. Prouver que l'on a: $f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

Solution: On a $f'(0) = 1$ donc, par TAYLOR-YOUNG, $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$ au voisinage de 0 ie $f(x) = 1 + x + o(x)$. Et cela s'écrit aussi $f(x) - 1 \sim x$ lorsque $x \to 0$.

On pose, pour tout $x > 0, g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2} \, \mathrm{d}t$.

8. Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Solution:

g est bien définie par on a $f(t) > 0$ pour $t > 0$.

Par théorème, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{xf^2(x)}$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, g' l'est aussi et finalement, g aussi.

9. Étudier le signe de g sur $]0, +\infty[$.

Solution: Par positivité de l'intégrale, si $x \in]0,1]$, on a $g(x) \leq 0$ et si $x \in [1,+\infty[$, on a $g(x) \geq 0$.

10. Montrer que : $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} \ln(x)$.

Solution: On a $g(x) - \frac{1}{\ln x} = \int_1^x \frac{dt}{tf^2(t)} - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{1-f^2(t)}{tf^2(t)} dt$. Or, lorsque $x \to 0$, $\frac{1-f^2(x)}{xf^2(x)} = \frac{(1-f(x))(1+f(x))}{xf^2(x)} \sim 2$. Cela prouve que $\int_0^1 \frac{1-f^2(t)}{tf^2(t)} dt$ converge (c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $]0,1]$ qui a une limite finie en 0).

Ainsi, $g(x) - \ln x = o(\ln x)$ lorsque $x \to 0$ et donc $g(x) \sim \ln x$.

11. Prouver que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) > 1 + t$.

Solution: Soit $t > 0$. On a $f(t) - (1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!^2} \geq 0$ puisque c'est la somme d'une série à termes positifs. Et c'est même > 0 puisqu'au moins un des termes est > 0.

12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution: g est croissante sur $[1,+\infty[$ (puisque sa dérivée y est positive) et par le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite en $+\infty$. De plus cette limite est infinie lorsque g n'est pas majorée et finie sinon.

De plus, pour $x \geq 1$, par croissance de l'intégrale, on a $g(x) \leq \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2}$. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2}$ converge car c'est l'intégrale généralisée d'une fonction positive, continue et équivalent en $+\infty$ à $\frac{1}{t^3}$ qui est intégrable par Riemann.

Finalement, comme $\frac{1}{t(1+t)^2} \geq 0$, on $g(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t-1+t)^2}$.

Cela prouve que g est majorée et qu'ainsi sa limite en $+\infty$ est finie.

13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(1+X)^2}$.

Solution: On sait qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$$

Par les méthodes classiques, on obtient $a = 1$ et $c = -1$.

Puis en faisant $\times X$ puis en passant aux fonctions rationnelles et en faisant tendre $x \to +\infty$, on obtient $0 = a + b$ donc $b = -1$.

On conclut

$$\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}$$

14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$g(x) \leqslant \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

Solution: En reprenant la majoration de la question 12, et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient pour $x > 1$, $g(x) \leq \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} dt$ ce qui donne par calcul

$$g(x) \leq \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2} + \ln 2$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0, +\infty[$.

Solution: g est négative sur $]0, 1]$ donc majorée par $\ln 2$. Si $x \geq 1$, on a $\ln \frac{x}{x+1} \leq 0$ puisque $\frac{x}{x+1} \leq 1$, $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ et finalement, $g(x) \leq \ln 2$.