

MP

Devoir Maison

Intégrales à Paramètre

CNC 2025

EXERCICE

(Noté 4 points sur 20)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ à valeurs réelles. On note φ_f l'application définie, pour tout réel x , pour lequel l'intégrale existe, par

$$\varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) e^{-t} dt$$

On suppose de plus que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |f(x, t)| \leq M$$

1.
 - a) Montrer que, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $|f(x, t) e^{-t}| \leq M e^{-t}$.
 - b) En déduire que φ_f est définie sur $\mathbb{R}$.
 - c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, t) e^{-t} = 0$.
2. On considère les deux fonctions réelles g et h définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par,

$$g(x, t) = \cos(xt) \quad \text{et} \quad h(x, t) = \sin(xt)$$

- a) Vérifier que φ_g et φ_h sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer, en appliquant une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_g(x) = 1 - x \varphi_h(x)$$

- c) Montrer, en appliquant une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_h(x) = x \varphi_g(x)$$

- d) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- e) Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \int_0^x \varphi_g(u) du + \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_g(u) du = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \int_0^x \varphi_h(u) du - \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_h(u) du = \ln x$$

PROBLÈME

Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ à valeurs réelles, où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n et pour tout réel t dans $\mathcal{D}_2$, on définit la fonction $g_{(n,t)}$ de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathbb{R}$ par,

$$g_{(n,t)}(x) = x^n f(x, t)$$

$\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

On utilise, dans tout le problème, la convention $0^0 = 1$.

PARTIE 1 : Étude d'une série géométrique particulière et son application

Dans cette partie, on prend, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, t) = 1$, ainsi on pose pour tout entier naturel n et pour tout $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_n(x) = g_{(n,t)}(x) = x^n$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=0}^n f_k(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

- b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=1}^n k f_{k-1}(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

- c) i) Justifier que, pour tout réel x dans $] -1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n = 0$.

- ii) En déduire que, pour tout réel x dans $] -1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} n f_{n-1}(x)$ est convergente et que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Pour tout entier naturel j , on considère la fonction S_j définie par $S_j(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} f_{n-j}(x)$.

- a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant la fonction S_j .

- b) Montrer que la fonction S_j est dérivable sur $] -1, 1[$ et que pour tout x dans $] -1, 1[$,

$$S'_j(x) = (j+1)S_{j+1}(x)$$

- c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j et pour tout x dans $] -1, 1[$,

$$S_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}$$

- d) Montrer que, pour tout réel x dans $] -1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} n^2 f_{n-1}(x)$ est convergente et que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit p un réel de $]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit la loi géométrique de paramètre p , c'est-à-dire une application X de Ω vers $\mathbb{R}$ telle que,

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

- a) Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ qu'on déterminera en fonction de p .

- b) Montrer que X^2 admet une espérance $\mathbb{E}(X^2)$ qu'on déterminera en fonction de p .
 c) En déduire $\text{Var}(X)$ la valeur de la variance de X en fonction de p .

PARTIE 2 : La résolution d'une équation différentielle

Pour tout entier naturel n , on considère l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$:

$$(\mathcal{E}_n) \quad y'' + y = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

Dans cette partie, on prend pour tout (x, t) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$, $f(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$.

1. Montrer que, pour tout réel strictement positif t , l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_{(n,t)}(x)dx$ converge.

On note ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad h_n(t) = \int_0^{+\infty} g_{(n,t)}(x)dx$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , h_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $h'_n = -h_{n+1}$.
 3. Montrer que, pour tout entier naturel k , h_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer $h_n^{(k)}$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction h_n , en fonction de h_{n+k} .
 4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t ,

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx$$

- a) Vérifier que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t , $I_n(t)$ existe.
 b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel strictement positif t ,

$$I_n(t) = \frac{n}{t} I_{n-1}(t)$$

- c) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t ,

$$I_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

- d) En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t ,

$$h_n''(t) + h_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

- e) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_n(t)$.

- a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad y'' + y = 0.$$

- b) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation différentielle $(\mathcal{E}_n)$ admet sur $]0, +\infty[$ une et une seule solution k_n , qui vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_n(t) = 0$, préciser k_n .

PARTIE 3 : Une autre expression de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$

1. Soit k un entier naturel et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge.

On considère la fonction réelle ψ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\psi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$.

Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer $\psi^{(k+1)}(x)$ en fonction de $\varphi^{(k)}(x)$.

2. a) Montrer que, pour tout couple (t, u) de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et pour tout réel s tel que $s > t$,

$$\int_t^s \frac{\sin(x-u)}{x} dx = \frac{\cos(t-u)}{t} - \frac{\cos(s-u)}{s} - \int_t^s \frac{\cos(x-u)}{x^2} dx$$

- b) Montrer que, pour tout couple (t, u) de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-u)}{x} dx$ est convergente et que,

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-u)}{x} dx = \frac{\cos(t-u)}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-u)}{x^2} dx$$

Ainsi, on considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par $\phi(t, u) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-u)}{x} dx$.

On définit aussi la fonction θ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\theta(t) = \phi(t, t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx$.

- c) Montrer que, pour tout entier naturel k , θ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
d) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta''(t) + \theta(t) = \frac{1}{t}$.
e) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 0$.

3. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} du = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx$.

4. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ tel que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \int_n^{+\infty} \frac{\sin(x-n)}{x} dx.$$

PARTIE 4 :

Application : le calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est une intégrale convergente.

2. a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx$ est convergente et que,

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dx$$

- b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente et que,

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

- c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left| \theta(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq t(1 + \ln(1+t) - \ln t)$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ est convergente et en déduire sa valeur.

5. Montrer que les intégrales $J = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ et $K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$ sont convergentes et calculer leurs valeurs respectives.

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours National Commun
CORRIGÉ DE
L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1
Session 2025 - Filière MP

m.laamoum2@gmail.com¹

EXERCICE

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ à valeurs réelles. On note φ_f l'application définie, pour tout réel x , pour lequel l'intégrale existe, par

$$\varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) e^{-t} dt$$

On suppose de plus que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |f(x, t)| \leq M$$

1. a) Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. On a $e^{-t} > 0$ et $|f(x, t)| \leq M$, donc, $|f(x, t)e^{-t}| \leq Me^{-t}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x, t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

D'après la question précédente, $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(x, t)e^{-t}| \leq Me^{-t}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} Me^{-t} dt$ converge ($\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$). Par comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x, t)e^{-t}| dt$ converge.

Ceci implique que la fonction $t \mapsto f(x, t)e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x, t)e^{-t} dt$ est convergente. Ainsi, $\varphi_f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $0 \leq |f(x, t)e^{-t}| \leq Me^{-t}$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} Me^{-t} = 0$, par le théorème d'encadrement, on conclut que $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, t)e^{-t} = 0}$.

2. a) Les fonctions g et h sont continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et elles sont majorées (en valeur absolue) par $M = 1$.

D'après la question Q1.b), les fonctions φ_g et φ_h sont définies sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\varphi_g(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$. Effectuons une intégration par parties.

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = \cos(xt) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \quad \text{alors } \begin{cases} u'(t) = -x \sin(xt) \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

Pour $A > 0$,

$$\int_0^A \cos(xt)e^{-t} dt = [-\cos(xt)e^{-t}]_0^A - \int_0^A (-x \sin(xt))(-e^{-t}) dt = 1 - \cos(xA)e^{-A} - x \int_0^A \sin(xt)e^{-t} dt.$$

Ainsi, en passant à la limite $A \rightarrow +\infty$, on obtient $\boxed{\varphi_g(x) = 1 - x\varphi_h(x)}$.

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici <https://tinyurl.com/4up84xze>

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\varphi_h(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t}dt$.

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = \sin(xt) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \quad \text{alors } \begin{cases} u'(t) = x \cos(xt) \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

Pour $A > 0$,

$$\int_0^A \sin(xt)e^{-t}dt = [-\sin(xt)e^{-t}]_0^A - \int_0^A (x \cos(xt))(-e^{-t})dt = -\sin(xA)e^{-A} + x \int_0^A \cos(xt)e^{-t}dt.$$

Ainsi, en passant à la limite $A \rightarrow +\infty$: on a $\boxed{\varphi_h(x) = x\varphi_g(x)}$.

d) Nous avons les relations : $\varphi_g(x) = 1 - x\varphi_h(x)$ et $\varphi_h(x) = x\varphi_g(x)$, donc

$$\varphi_g(x) = 1 - x(x\varphi_g(x)) = 1 - x^2\varphi_g(x).$$

D'où $\varphi_g(x)(1 + x^2) = 1$. Comme $1 + x^2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors : $\boxed{\varphi_g(x) = \frac{1}{1 + x^2}}$.

e) Soit $x \in]0, +\infty[$.

• On a

$$\int_0^x \varphi_g(u)du + \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_g(u)du = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}du + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+u^2}du = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction $F : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, donc elle est constante sur $]0, +\infty[$ et $F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\boxed{\int_0^x \varphi_g(u)du + \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_g(u)du = \frac{\pi}{2}}$

• Pour la seconde identité : On a $\varphi_h(u) = u\varphi_g(u) = \frac{u}{1+u^2}$, donc

$$\int_0^x \varphi_h(u)du = \int_0^x \frac{u}{1+u^2}du = \left[\frac{1}{2} \ln(1+u^2) \right]_0^x = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi_h(u)du - \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_h(u)du &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\int_0^x \varphi_h(u)du - \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_h(u)du = \ln(x)}$.

PROBLÈME

PARTIE 1 :

Étude d'une série géométrique particulière et son application

1. a) On a $\sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k$. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$, donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n f_k(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}.$$

- b) Soit $x \neq 1$. On dérive la relation précédente

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

$$\text{d'où } \boxed{\sum_{k=1}^n kf_{k-1}(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}.$$

- c) i) Soit $x \in]-1, 1[$. On a

$$n|x|^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\ln n + n \ln |x|} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$ alors

$$\ln n + n \ln |x| = n \left(\ln |x| + \frac{\ln n}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \quad (\text{car } \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \ln |x| < 0)$$

ce qui donne

$$e^{\ln n + n \ln |x|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où $n|x|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi pour tout $x \in]-1, 1[$, $\boxed{nx^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

- ii) Pour $x \in]-1, 1[$, on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'expression de 1.b). Les termes nx^{n+1} et $(n+1)x^n$ tendent vers 0.

Ce qui prouve la convergence de $\sum_{n \geq 1} nf_{n-1}(x)$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nf_{n-1}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}}$.

2. Soit

$$S_j(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} f_{n-j}(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} x^{n-j}.$$

- a) On a

$$R_{cv} \left(\sum_{n \geq j} \binom{n}{j} x^{n-j} \right) = R_{cv} \left(\sum_{n \geq j} \binom{n}{j} x^n \right)$$

Utilisons la règle de D'Alembert

$$\left| \frac{\binom{n+1}{j}}{\binom{n}{j}} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1-j)! j!} \frac{(n-j)! j!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc le rayon de convergence est $R = 1$.

- b) S_j est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.
 Pour $x \in] -1, 1[$, on a

$$S'_j(x) = \sum_{n=j+1}^{+\infty} \binom{n}{j} (n-j) x^{n-j-1}.$$

On utilise

$$\binom{n}{j} (n-j) = \frac{n!}{j!(n-(j+1))!} = (j+1) \binom{n}{j+1}.$$

donc

$$S'_j(x) = \sum_{n=j+1}^{+\infty} (j+1) \binom{n}{j+1} x^{n-(j+1)} = (j+1) S_{j+1}(x).$$

D'où $\boxed{S'_j(x) = (j+1) S_{j+1}(x)}$.

- c) Par récurrence sur j .

- Pour $j = 0$,

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{0} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Vrai.

- Supposons $S_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}$. Alors

$$S'_j(x) = \frac{j+1}{(1-x)^{j+2}}.$$

et d'après b),

$$S_{j+1}(x) = \frac{1}{j+1} S'_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+2}}$$

la formule est vraie pour tout $j+1$.

Ainsi pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}}$.

- d) Soit $x \in] -1, 1[$, on a

$$n^2 f_{n-1}(x) = n^2 x^{n-1} = n(n-1)x^{n-1} + nx^{n-1}.$$

Par la règle de D'Alembert la série $\sum n^2 f_{n-1}(x)$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 f_{n-1}(x) &= x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= x \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) + \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \\ &= x \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1+x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 f_{n-1}(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}}$.

3. $X \sim \mathcal{G}(p)$. $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $q = 1-p$.

- a) Comme $p \in]0, 1[$ alors la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k) = kpq^{k-1}$ est convergente, donc X admet une espérance et on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = pS_1(q).$$

D'après Q1.c).ii), avec $x = q$, la somme vaut

$$\mathbb{E}(X) = pS_1(q) = p \frac{1}{(1-q)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}}.$

- b) D'après le théorème du transfert X^2 admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 1} k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge.

On a $k^2 \mathbb{P}(X = k) = k^2 pq^{k-1}$, par la règle de D'Alembert la série $\sum_{k \geq 1} k^2 pq^{k-1}$ converge, donc X^2 admet une espérance. Par suite

$$\mathbb{E}(X^2) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 f_{k-1}(q).$$

D'après Q2.d, avec $x = q$, on a

$$\mathbb{E}(X^2) = p \frac{1+q}{(1-q)^3} = p \frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2} = \frac{1+(1-p)}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \frac{2-p}{p^2}}.$

- c) On a

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

d'où $\boxed{\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}}.$

PARTIE 2 :

La résolution d'une équation différentielle

On a $f(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$. Ainsi, $g_{(n,t)}(x) = x^n f(x, t) = \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour $t > 0$, on a $\left| \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2} \right| \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par la règle de Riemann l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_{(n,t)}(x) dx$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

2. Par application du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $x \mapsto g_{(n,t)}(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $(t, x) \mapsto g_{(n,t)}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$, et

$$\frac{\partial}{\partial t} (g_{(n,t)}(x)) = \frac{x^{n+1} e^{-tx}}{1+x^2} = -g_{(n+1,t)}(x).$$

- **Domination :** Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $t \in [a, b]$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (g_{(n,t)}(x)) \right| = \frac{x^{n+1} e^{-tx}}{1+x^2} \leq \frac{x^{n+1} e^{-ax}}{1+x^2}$$

La fonction $\psi(x) = \frac{x^{n+1} e^{-ax}}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question 1.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, h_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$h'_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (g_{(n,t)}(x)) dx = \int_0^{+\infty} -g_{(n+1,t)}(x) dx = -h_{n+1}(t).$$

Ainsi $\boxed{h_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } h'_n(t) = -h_{n+1}(t)}.$

3. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que h_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $h_n^{(k)}(t) = (-1)^k h_{n+k}(t)$.

- **Initialisation** : D'après Q2, h_n est $\mathcal{C}^1$ et $h'_n = -h_{n+1}$. La propriété est vraie pour $k = 1$.

- **Hérédité** : Supposons que pour un $k \geq 1$, h_n est $\mathcal{C}^k$ et $h_n^{(k)}(t) = (-1)^k h_{n+k}(t)$.

D'après Q2, la fonction h_{n+k} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc $h_n^{(k)}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Ceci implique que h_n est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus,

$$h_n^{(k+1)}(t) = \frac{d}{dt}((-1)^k h_{n+k}(t)) = (-1)^k h'_{n+k}(t) = (-1)^{k+1} h_{n+k+1}(t).$$

La propriété est vraie au rang $k + 1$.

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{h_n \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } h_n^{(k)}(t) = (-1)^k h_{n+k}(t)}.$

4. Soit $I_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx$.

- a) On a pour tout $t \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-tx}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $x^n e^{-tx} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc la fonction $x \mapsto x^n e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, d'où l'existence de $I_n(t)$.
- b) Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, effectuons une intégration par parties :

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = e^{-tx} \end{cases} . \text{ Alors } \begin{cases} u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = -\frac{e^{-tx}}{t} \end{cases} .$$

donc

$$I_n(t) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[-x^n \frac{e^{-tx}}{t} \right]_0^A - \int_0^A nx^{n-1} \left(-\frac{e^{-tx}}{t} \right) dx \right).$$

on a $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-x^n \frac{e^{-tx}}{t} \right]_0^A = 0$ et l'intégrale est convergente, donc

$$I_n(t) = \frac{n}{t} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-tx} dx = \frac{n}{t} I_{n-1}(t)$$

Ainsi $\boxed{I_n(t) = \frac{n}{t} I_{n-1}(t)}.$

c) Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- **Initialisation** :

$$I_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \left[-\frac{e^{-tx}}{t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}.$$

La formule est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité** : Supposons $I_{n-1}(t) = \frac{(n-1)!}{t^n}$ pour un $n \geq 1$. Alors

$$I_n(t) = \frac{n}{t} I_{n-1}(t) = \frac{n}{t} \frac{(n-1)!}{t^n} = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

La formule est vraie au rang n .

Ainsi, $I_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$.

d) D'après Q2 on a $h_n''(t) = h_{n+2}(t)$, donc

$$h_n''(t) + h_n(t) = h_{n+2}(t) + h_n(t).$$

utilisons l'expression intégrale de h_n

$$\begin{aligned} h_{n+2}(t) + h_n(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+2}e^{-tx}}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(x^{n+2} + x^n)e^{-tx}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^n(x^2 + 1)e^{-tx}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx \\ &= I_n(t) \end{aligned}$$

D'après 4.c), on a ,

$$h_n''(t) + h_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

Ce qui montre que h_n est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_n)$.

e) On a

$$|h_n(t)| = \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx = I_n(t)$$

or $I_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_n(t) = 0$, par suite $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0$.

5. a) L'équation homogène $(\mathcal{E}_H) : y'' + y = 0$, a pour équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, dont les racines sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$.

Les solutions de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $]0, +\infty[$) sont les fonctions de la forme

$$y_H(t) = A \cos(t) + B \sin(t), \text{ où } A, B \in \mathbb{R}.$$

- b) D'après 4.d), $h_n(t)$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_n)$. La solution générale de $(\mathcal{E}_n)$ sur $]0, +\infty[$ est donc

$$y(t) = y_H(t) + h_n(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + h_n(t).$$

On cherche la solution k_n telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_n(t) = 0$.

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0$ (d'après 4.e)), la condition devient $\lim_{t \rightarrow +\infty} (A \cos(t) + B \sin(t)) = 0$.

Ce qui est réalisé si et seulement si $A = 0$ et $B = 0$. Donc, l'unique solution de $(\mathcal{E}_n)$ qui admet une limite nulle en $+\infty$ est h_n .

PARTIE 3 :

Une autre expression de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$

1. Soit $\psi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(s) ds$. Puisque $\int_1^{+\infty} \varphi(s) ds$ converge, pour tout $c \geq 1$, $\int_c^{+\infty} \varphi(s) ds$ converge.
Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. On peut écrire

$$\psi(x) = \int_c^{+\infty} \varphi(s) ds - \int_c^x \varphi(s) ds.$$

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}^{+*}$), d'après le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_c^x \varphi(s) ds$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, ψ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, $\psi^{(j)}(x) = -\varphi^{(j-1)}(x)$. En particulier, pour $j = k+1$, on a $\psi^{(k+1)}(x) = -\varphi^{(k)}(x)$.

2. Soit $t > 0$.

a) Pour $s > t$, posons $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = \sin(x - u)$. Alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $g(x) = -\cos(x - u)$.

Une intégration par parties donne

$$\int_t^s \frac{\sin(x - u)}{x} dx = \left[-\frac{\cos(x - u)}{x} \right]_t^s - \int_t^s \left(-\frac{1}{x^2} \right) (-\cos(x - u)) dx = \frac{\cos(t - u)}{t} - \frac{\cos(s - u)}{s} - \int_t^s \frac{\cos(x - u)}{x^2} dx.$$

b) On a $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\cos(s - u)}{s} = 0$ et

$$\left| \frac{\cos(x - u)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \int_t^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge}$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x - u)}{x} dx$ est convergente et

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x - u)}{x} dx = \frac{\cos(t - u)}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x - u)}{x^2} dx.$$

c) On a

$$\theta(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x - t)}{x} dx = \int_t^{+\infty} \frac{\cos(t) \sin(x) - \cos(x) \sin(t)}{x} dx$$

remarquons que

$$\phi(t, 0) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \text{et} \quad \phi(t, \frac{-\pi}{2}) = \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

donc ces intégrales convergent et

$$\theta(t) = \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

D'après Q1, les fonctions

$$t \mapsto \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \text{et} \quad t \mapsto \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

sont de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc θ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) On a

$$\begin{aligned} \left(\cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)' &= (\cos(t))' \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx + \cos(t) \left(\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)' \\ &= -\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{\sin(t) \cos(t)}{t} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \right)' &= (\sin(t))' \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx + \sin(t) \left(\int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \right)' \\ &= \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx - \frac{\sin(t) \cos(t)}{t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \left(\cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)' - \left(\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \right)' \\ &= -\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \theta''(t) &= - \left(\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)' - \left(\cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \right)' \\ &= - \left(\cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{\sin^2(t)}{t} \right) - \left(-\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx - \frac{\cos^2(t)}{t} \right) \\ &= \sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx - \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx + \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{t} \end{aligned}$$

Donc,

$$\theta''(t) = -\theta(t) + \frac{1}{t}$$

Ce qui est équivalent à l'équation différentielle : $\boxed{\theta''(t) + \theta(t) = \frac{1}{t}}$

e) D'après Q2.b , on a

$$\theta(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx = \frac{1}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-t)}{x^2} dx.$$

et

$$\left| \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-t)}{x^2} dx \right| \leq \int_t^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{t}$$

donc

$$|\theta(t)| \leq \frac{2}{t}$$

ce qui donne $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 0}$.

3. D'après Q5.b de la Partie 2 , h_0 est l'unique solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur $]0, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$.
D'après Q2. de la Partie 3 , θ est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$.

Donc $\theta = h_0$, ainsi pour tout $t > 0$: $\boxed{\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx}$.

4. Soit $u_n = \theta(n) = \int_n^{+\infty} \frac{\sin(x-n)}{x} dx$. D'après la question Q2.b , $u_n = \frac{1}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{\cos(x-n)}{x^2} dx$.
Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \left(\left[\frac{\sin(x-n)}{x^2} \right]_n^{+\infty} + \int_n^{+\infty} \frac{2 \sin(x-n)}{x^3} dx \right) \\ &= \frac{1}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{2 \sin(x-n)}{x^3} dx \end{aligned}$$

mais

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{2 \sin(x-n)}{x^3} dx \right| \leq \int_n^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx = \frac{1}{n^2}$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge.

Autre méthode : on a

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x^2} dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx} dx = \frac{1-e^{-n}}{2n}$$

$\frac{1-e^{-n}}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, donc $\sum \frac{1-e^{-n}}{2n}$ diverge, par suite la série $\sum u_n$ diverge.

PARTIE 4 :

Application : le calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

1. La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- **En 0** : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. La fonction est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

- **En $+\infty$:** Soit $A > 1$. Une intégration par parties donne :

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{1}{x^2} \right) (-\cos x) dx = -\frac{\cos A}{A} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

On a $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge.

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$, alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx$ existe. Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

2. Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

- a) • La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{(x+t)x}$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur $1/t$), donc

l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx$ converge.

- On a $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$, donc

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{\sin x}{x} \right| \frac{1}{x+t} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dx.$$

- b) Comme $x \geq 1$ et $t > 0$, $x+t \geq x$. Donc

$$\left| \frac{\sin x}{x(x+t)} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+t)} dx$ est convergente et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

- c) On a

$$\begin{aligned} \theta(t) - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+t} dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_0^\infty \sin x \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= -t \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x+t)} dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \theta(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= t \left| \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \\ &\leq t \left(\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| + \left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \right) \end{aligned}$$

En utilisant a) et b) :

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dx = [\ln(x+t)]_0^1 = \ln(1+t) - \ln t.$$

et

$$\left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\left| \theta(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq t(1 + \ln(1+t) - \ln t)}.$$

- 3.** On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} t(1 + \ln(1+t) - \ln t) = 0$, cela implique

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

D'après Partie 3, Q3, $\theta(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$.

Pour calculer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t)$, on utilise le théorème de convergence dominée, version continue :

Soit $f_t(x) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$. On a

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_t(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Pour tout $t \geq 0$ et $x \geq 0$, $|f_t(x)| = \frac{e^{-tx}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. (Conditions de domination).

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t) = \int_0^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} f_t(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$.

4. La fonction $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1).

Comme $0 \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$. Par comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ converge.

Effectuons une intégration par parties :

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \sin^2(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} . \text{ Alors } \begin{cases} u'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x) \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

donc

$$I = \left[-\frac{\sin^2(x)}{x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \sin(2x) \left(-\frac{1}{x} \right) dx$$

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0$ et $\frac{\sin^2 x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc $\left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_0^{+\infty} = 0$.

Par suite

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx$$

Posons $y = 2x$, alors

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y/2} \frac{dy}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy.$$

D'après la question Q3, $\boxed{I = \frac{\pi}{2}}$.

5. • La fonction $g : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0, on a $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$. Donc g est prolongeable par continuité en 0.

En $+\infty$, $0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$.

Donc l'intégrale J converge.

Une intégration par parties donne :

$$J = \left[-\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ et $\frac{1 - \cos x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2} + o(x)$, donc $\left[-\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^{+\infty} = 0$.

Ainsi $\boxed{J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$.

- La fonction $h : x \mapsto \frac{\sin^4 x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0, on a $\frac{\sin^4 x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$, donc h est prolongeable par continuité en 0.

En $+\infty$, on a $0 \leq \frac{\sin^4 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

L'intégrale K converge. Ecrivons

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

La première intégrale est $I = \pi/2$.

Pour la seconde : on a $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2(2x)}{4}$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(2x)}{4x^2} dx$$

posons $y = 2x$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{4(y/2)^2} \frac{dy}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} I.$$

Donc $K = I - \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} I$.

Ainsi $\boxed{K = \frac{\pi}{4}}$.