

DS : Algèbre Linéaire

Durée : 4 heures

Exo 1 : On pose $P(x) = (x+1)^n - 1$

1) Rappeler la def et propriétés de racine n^{e} de l'unité dans $\mathbb{C}$

2) En déduire les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$

Indic : On pourra utiliser la formule

$$e^{i\theta} = 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$$

(double moitié)

3) En déduire que $P(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - z_k)$

$$\text{où } z_k = 2i \sin \frac{k\pi}{n} e^{\frac{ik\pi}{n}} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

4) Que vaut z_0

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x}$$

5) En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x} = n \quad \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = i^{n-1}$$

6) Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

7) En déduire que

(1)

Exo 2 P scindé $\Rightarrow P'$ scindé

1) Dire pourquoi la question ouverte est vraie dans $\mathbb{C}(x)$

2) On suppose ici $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ scindé à racines simple

on pose $\deg P = n$ et $a_1, \dots, a_n$ ses racines

i) Rappeler le thm de Rolle

ii) En appliquant le thm de Rolle sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ $\forall i \leq n-1$

Mq $\exists \lambda_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tq $P'(\lambda_i) = 0$

iii) En deduire que $P'(x)$ est aussi scindé à racines simple

3) On suppose ici $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ scindé

on pose $\deg P = n$, $a_1 < \dots < a_m$ les racines de P

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ leur mult respectifs

$$\text{et } Q(x) = \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{\alpha_i - 1}$$

i) Dire pourquoi $(x - a_i)^{\alpha_i - 1}$ divise $P'(x)$ $\forall 1 \leq i \leq m$

ii) En deduire que $Q(x)$ divise $P'(x)$

iii) Mq $\exists \lambda_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tq $P'(\lambda_i) = 0$ $1 \leq i \leq m-1$

iv) En deduire que $B(x) = \prod_{i=1}^{m-1} (x - \lambda_i)$ divise $P'(x)$

v) En deduire que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $P'(x) = \lambda B(x) Q(x)$

vi) Dire pourquoi $\lambda = n \cdot \text{ct}(P)$

vii) Conclure que $P'(x)$ est aussi scindé dans $\mathbb{R}(x)$

Problème

: Calcul Matriciel et Applications

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$, $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ la j^{e} ligne de A

$L_i = (a_{i1} \dots a_{in})$ la i^{e} ligne de A

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{e}}$ le i^{e} elt de la base canonique de $M_{n,1}(K)$

Partie I: Qlq Règles de calcul Matriciel

1) Vérifier que $AE_j = C_j$

2) En déduire que si $B \in M_n(K)$

Alors, $[j^{\text{e}} \text{ colonne de } AB = A \cdot j^{\text{e}} \text{ colonne de } B]$

3) On pose $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \circ & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \circ & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ matrice élémentaire

③

i) Que vaut la j^{e} colonne de E_{ij}

ii) Que valent les autres colonnes de E_{ij}

4) i) En deduire que la j^{e} colonne de $A E_{ij} = j^{\text{e}}$ colonne de A

ii) " " " les autres colonnes de $A E_{ij}$ sont toutes nulles

iii) En deduire que $A E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} a_{ji} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$
↑
écrite à la j^{e} colonne

5) En utilisant I-4.iii) Mq.

$$E_{ij} A = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{ji} & - & - & a_{jn} \\ & & 0 & \end{pmatrix}$$

↑ a_{ji} ← écrite à la i^{e} ligne
↑ a_{jn}

indication: penser à utiliser la transposée
notamment ${}^t E_{ij} = E_{ji}$

Partie II: Lemme de Schur (version matricielle)

Soit $A \in M_n(K)$, on suppose que $AM = MA \quad \forall M \in M_n(K)$
on se propose de mq $\exists \lambda \in K$ tq $A = \lambda I_n$

1) i) En utilisant $A E_{ij} = E_{ij} A \quad \forall i \neq j$
Mq $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$

$$a_{ii} = a_{jj} \quad \forall i \neq j$$

ii) Conclure

Partie III: Une formule célèbre

on se propose de mg $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$

ou $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$ (Symbole de Kronecker)

- 1) On suppose $j \neq k$
- i) Mg la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{ij} E_{kl}$ est nulle
- ii) Mg toutes les colonnes de $E_{ij} E_{kl}$ sont nulles

Indic: Utiliser I.2 et I.4

iii) Conclure

- 2) On suppose $j = k$

i) Mg la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{ij} E_{jl}$ est e_j

ii) Mg les autres colonnes de $E_{ij} E_{jl}$ sont toutes nulles

iii) En déduire que $E_{ij} E_{jl} = E_{il}$

3) Conclure

Partie IV: Un peu de dualité (en dim finie)

on appelle forme linéaire de E toute app
linéaire $\varphi: E \rightarrow K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

1) Mg $\text{Tr}: M_n(K) \rightarrow K$ est une forme linéaire

ii) Mg $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad \forall A, B \in M_n(K)$

2) i) Mg $\boxed{\text{Tr}(A E_{ij}) = a_{ji}}$ $\forall i, j$
Indic: utiliser I.4

ii) En déduire que si $\text{Tr}(AB) = 0 \quad \forall B \in M_n(K)$
Alors $A = 0$

3) Soit $\varphi: M_n(K) \rightarrow K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une forme
linéaire vérifiant $\varphi(AB) = \varphi(BA)$

On pose $M = (m_{ij}) \in M_n(K)$ tq $m_{ij} = \varphi(E_{ji})$
 $1 \leq i, j \leq n$

ii) Montrer $\varphi(A) = \text{Tr}(AM)$ $\forall A \in M_n(K)$

indice : $A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} E_{ij}$

puis utiliser IV.2.2

ii) En deduire que $\text{Tr}(ABM) = \text{Tr}(BAM)$
 $\forall A, B \in M_n(K)$

iii) " " $\text{Tr}(ABM) = \text{Tr}(AMB)$ $\forall A, B \in M_n(K)$

iv) " " $\text{Tr}(A(BM - MB)) = 0$ $\forall A, B \in M_n(K)$

v) " " $BM - MB = 0$ $\forall B \in M_n(K)$

vi) " " $\exists \lambda \in K$ tq $M = \lambda I_n$

indice : utiliser II : Lemme de Schur

vii) " " $\exists \lambda \in K$ tq $\varphi = \lambda \text{Tr}$

4) Que peut-on dire à propos de l'ensemble
 $\{ \varphi: M_n(K) \rightarrow K \text{ linéaire vérifiant } \varphi(AB) = \varphi(BA) \}$

Fina

6