

DS (4h)
Prehiebentiens

Thème : Formes Bilineaires

Notations et Vocabulaire

E est un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie
 $\dim E = n \geq 2$ et $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base de E fixé

$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire
 $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$

on pose $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ tq $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$

On l'appelle la matrice de φ dans β

pour tout $x \in E$, on pose $q(x) = \varphi(x, x)$

q : forme quadratique associée à φ

si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

si $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Système de
coordonnées
de x et y
dans β

Partie I: Généralité

1) Mg $\forall (x, y) \in E \times E$ on a

$$\varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i y_j = X^T \cdot M \cdot Y$$

$$q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = X^T \cdot M \cdot X$$

2) Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une autre base de E

on pose $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = (P_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$

X' et Y' les syst de coordonnées de x et y dans $\mathcal{C}$

i) Mg $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} e_i$

ii) En deduire que $x = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j \right) e_i$

iii) " " " $x_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j, \forall 1 \leq i \leq n$

iv) Conclure que $X = P X'$

v) En deduire que $\varphi(x, y) = (X')^T (P^T \cdot M \cdot P) Y'$

vi) Conclure $N = P^T \cdot M \cdot P$

soit $N = (\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ designe la matrice de φ dans $\mathcal{C}$

(2)

③ Un exemple : on prend ici $E = \mathbb{R}_2[X]$
et $\beta = (1, X, X^2)$ et $\varphi(P, Q) = P(1) Q'(1)$

i) Mg $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire

ii) Donner M : la matrice de φ dans β

iii) on prend $\mathcal{C} = (1, X-1, (X-1)^2)$

a) Dire pourquoi $\mathcal{C}$ base de $\mathbb{R}_2[X]$

b) Donner N : la matrice de φ dans $\mathcal{C}$

c) " $P = P_{\beta} \rightarrow \mathcal{C}$

d) Vérifier sur cet exple la relation

$$N = P^T \cdot M \cdot P$$

④ On pose $\boxed{\text{rg } \varphi = \text{rg } M}$

Mg cette définition ne dépend pas de M

Autrement dit : Mg $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$

⑤ on pose $\text{Ker } \varphi = \{x \in E \mid \varphi(x, y) = 0 \forall y \in E\}$

à Mg $x \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(M^T)$

ii) En deduire que $\boxed{\dim \text{Ker } \varphi = \dim \text{Ker } M}$

⑥ Conclure que

$$\boxed{\dim E = \dim \text{Ker } \varphi + \text{rg } \varphi}$$

③

Partie II

La cas symétrique

on suppose dans cette partie que φ est
de plus symétrique, c'est $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

$$\forall (x, y) \in E \times E$$

- ① Dire pourquoi M est symétrique puis $\frac{M}{\text{sp}(M)} \in \mathbb{R}$
- ② En deduire que $\exists P \in O(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
tq $M = P \cdot D \cdot P^T$

- ③ Conclure que $\varphi(x, y) = (X')^T \cdot D \cdot Y'$
où $X' = P^T \cdot X$ et $Y' = P^T \cdot Y$

- ④ En deduire que $q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2$
forme réduite de q

- ⑤ Un exple : $E = \mathbb{R}_1(X)$, $\varphi(P, Q) = P(2)Q'(2) + P'(2)Q(2)$
et $\beta = (1, X)$

- i) Trouver M , puis P et D tq $M = P \cdot D \cdot P^T$
- ii) Donner la forme réduite de $q(P)$
pour tout $P(X) = a + bX \in \mathbb{R}_1(X)$
- iii) Soit $P(X) = a + bX \in \mathbb{R}_1(X)$
 - a) Vérifier que $q(P) = 2ab$
 - b) Retrouver le résultat de II-5. ii)

Autrement

④

⑥ En utilisant II-3). Mq il existe une base $\mathcal{E}$ de E tq $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec
 $\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j$. Exprimer $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}$ en fct de P
 On dit que $\mathcal{E}$ est une base de E qui est φ -orthogonale

⑦ on pose $\text{sp}(M) = I \cup J \cup K$

tq $I = \{ \lambda_i \text{ tq } \lambda_i > 0 \}$

$J = \{ \lambda_i \text{ tq } \lambda_i < 0 \}$

$K = \{ \lambda_i \text{ tq } \lambda_i = 0 \}$

λ_i sont les v.p.
 comptés avec
 leurs multiplicités

i) Mq $\dim \text{Ker } M = \text{Card}(K)$

ii) Mq $\text{rg}(M) = \text{Card } I + \text{Card } J$

⑧ Mq à l'aide d'un chgt de variable

on peut écrire $q(x) = \sum_{i=1}^r g_i^2 - \sum_{i=1}^s h_i^2$

où $r = \text{Card } I$ et $s = \text{Card } J$

⑨ Un autre exple : on prend $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 et $x = (x_1, x_2)$

i) Vérifier que $q(x) = 2x_1x_2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2$

ii) on pose $x'_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $x'_2 = \frac{x_1-x_2}{2}$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

trouver $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $X' = PX$ $X = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$

iii) " $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ tq

$q(x) = X'^T \cdot D \cdot X'$

iv) En deduire $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base de E , φ -orthogonale

(5)

Partie III / Notion de φ -orthogonalité /

Dans cette partie φ est une forme bilinéaire symétrique

$x \in E$ et $y \in E$ sont dits φ -orthogonaux si

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ on écrit alors } x \perp_{\varphi} y$$

Si $A \subseteq E$ on pose $A^{\perp_{\varphi}} = \{x \in E \mid \varphi(x, y) = 0 \forall y \in A\}$

- ① Mq $A^{\perp_{\varphi}} = \text{Vect}(A)^{\perp_{\varphi}}$
- ② si F est un sev de E , mq $F^{\perp_{\varphi}}$ est aussi un sev de E
- ③ Mq $E^{\perp_{\varphi}} = \text{Ker } \varphi$, mq $\{0_E\}^{\perp} = E$
- ④ Donner un exple où $F^{\perp_{\varphi}} \neq F$
 $F \oplus F^{\perp_{\varphi}} \neq E$
- ⑤ Mq en gale si F est un sev de E , on a
 $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp_{\varphi}} - \dim (E^{\perp_{\varphi}} \cap F)$
- ⑥ On suppose dans cette question que $E^{\perp_{\varphi}} = \{0_E\}$
Mq dans ce cas $E = F \oplus F^{\perp_{\varphi}}$ et que $F^{\perp_{\varphi}} = F^{\perp_{\varphi}}$ pour tout sev F de E

⑥

Partie IV / Cas symétrique défini positif

On suppose dans cette partie que φ est bilinéaire
symétrique et

positive : $\varphi(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in E$

définie : $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

- ① Justifier que $x^T \cdot M \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- ② En deduire que $\text{Sp}(M) \subset]0, +\infty[$
puis que M est inversible
- ③ En deduire que $E^{\perp\varphi} = \{0_E\}$
- ④ En deduire que φ admet une base orthonormale
car $\exists \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de E
$$\begin{matrix} \text{tq} & \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ & 1 & \text{si } i = j \end{matrix}$$
- ⑤ Un exemple : $E = \mathbb{R}^3$ et
pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ on pose $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
 - i) Trouver y_1, y_2, y_3 en fct de x_1, x_2, x_3 tq
 $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ avec $\lambda_i = \pm 1$
 - ii) Donner $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $q(x) = x^T \cdot M \cdot x$
 - iii) Donner $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $q(x) = Y^T \cdot D \cdot Y$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$
 - iv) donner $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $X = P^{-1} \cdot Y$
car $Y = PX$
 - v) En deduire que $M = P^T \cdot D \cdot P$