PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN
MP

DS : Réduction

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Durée : 4 heures

Thème : les Projecteurs spectraux

. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tq $n \geq 2$, E $\mathbb{K}$-ev de dim finie.
$\dim E = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$

Partie I : Préliminaires

1) Enoncer et démontrer le lemme de décomposition des noyaux

Enoncer le thm dans le cas général
Démontrer le pour le cas de deux polynômes

2) Mq u admet un poly annulateur scindé (respect à racines simples)

$\iff \Pi_u$ est scindé (" — —)

$\iff \chi_u$ est scindé (" — — .)

Partie II : Cas gle

on pose $\Pi_u(x) = \prod_{i=1}^{m} P_i^{\alpha_i}(x)$ tq $P_i(x)$ polynômes irréductible tq $P_i \neq P_j$ $\forall i \neq j$

1) Mq $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$

2) Mq $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{m} P_i^{\beta_i}(x)$ tq $\alpha_i \leq \beta_i$ $\forall i \in [\![1, m]\!]$

3) Mq $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} P_i^{\beta_i}(u)$

4) En déduire que $\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u) = \operatorname{Ker} P_i^{\beta_i}(u)$ $\forall i \in [\![1, m]\!]$

Indication : Montrer d'abord une inclusion, puis raisonner sur les dimensions en utilisant les questions II.1 et II.3

⑤ On pose $Q_i(X) = \dfrac{\Pi_u(X)}{P_i^{\alpha_i}(X)}$

i) Justifier l'existence de polynome $R_1, \dots, R_m$ tq $Q_1R_1 + \dots + Q_mR_m = 1$

ii) Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $p_i = (Q_iR_i)(u) \in \mathcal{L}(E)$

a) Mq $id_E = \sum_{i=1}^{m} p_i$

b) Mq $\Pi_u(X)$ divise $(Q_iR_iQ_jR_j)(X)$ $\forall i \neq j$

c) En deduire que $p_i \circ p_j = 0$ $\forall i \neq j$

d) En deduire que $p_i^2 = p_i$

indic : utiliser ii) a et ii) c

Ainsi les p_i sont des projecteurs (un peu speciaux) on les appelle les projecteurs spectraux

Partie III : Cas trigonalisable

on pose $\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (scindé)

$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)^{\beta_i}$ (scindé) $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$

tq $\alpha_i \leq \beta_i$, ici $P_i(X) = X - \lambda_i$ $\forall 1 \leq i \leq m$

① Mq $E = \mathrm{Im}\, p_1 + \dots + \mathrm{Im}\, p_m$

② Soit $x \in \mathrm{Im}\, p_1 + \dots + \mathrm{Im}\, p_m$

on pose $x = x_1 + \dots + x_r$ tq $x_i \in \mathrm{Im}\, p_i$ $\forall\, 1 \le i \le m$

avec $x_i = p_i(y_i)$ tq $y_i \in E$

i) Mq $p_j(x) = x_j$ $\forall\, 1 \le j \le m$

ii) En deduire que l'ecriture de x dans $\mathrm{Im}\, p_1 + \dots + \mathrm{Im}\, p_m$ est unique

iii) En deduire que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\, p_i$

③ ~~Ensuite~~ Mq $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \, id_E)^{\alpha_i}$

④ Mq $\mathrm{Im}\, p_i \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \, id_E)^{\alpha_i}$ $\forall\, 1 \le i \le m$

⑤ En deduire que $\mathrm{Im}\, p_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \, id_E)^{\alpha_i}$ $\forall\, 1 \le i \le m$

indice : utiliser 2-iii) - 3 et 4

<u>Partie IV : Cas diagonalisable</u>

on pose $\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ (scindé à racines simples)

$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ (scindé)

$\lambda_i \ne \lambda_j$ $\forall i \ne j$

$Q_i(X) = \dfrac{\Pi_u(X)}{X - \lambda_i}$

① ~~Exposé~~ Mq $Q_i(\lambda_i) \neq 0 \quad \forall_{1 \leq i \leq m}$

② Mq la decomposition en elt simple de la fraction $\frac{1}{\Pi_u(X)}$ est exactement de la forme

$$\frac{1}{\Pi_u(X)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{Q_i(\lambda_i)(X-\lambda_i)}$$

③ En deduire que $\sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)} = 1$

④ En deduire que mht $p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} \quad \forall_{1 \leq i \leq m}$

⑤ i) Rappeler les informations que vous connaissez sur les polynômes de Lagrange

ii) En deduire que $X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L_i(X)$ où $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$

⑥ Conclure que $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$

cette ecriture s'appelle decomposition spectale de u

indic : utiliser 4) et 5-ii)

⑦ ~~Exo~~ i) Justifier que $u \circ p_i = p_i \circ u \quad \forall_{1 \leq i \leq m}$

ii) " " $u \circ p_j = \lambda_j p_j \quad \forall_{1 \leq j \leq m}$

iii) En deduire que $u^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 p_i$

iv) Mq $u^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i \quad \forall k \in \mathbb{N}$

FiN

Bonne Chance