

DS : EVN

Topologie Mathématique
Un peu de tout

Durée : 4 heures

Notations

$n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \det A \neq 0 \}$$

$$S_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^t A = A \}$$

$$O(n) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tq } A^{-1} = {}^t A \}$$

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \{ A \in S_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^t X \cdot A \cdot X \geq 0 \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \}$$

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{ A \in S_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^t X \cdot A \cdot X > 0 \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } X \neq 0 \}$$

Partie I / Préliminaires

1) Topologie de $GL_n(\mathbb{R})$

- i) $M_n(\mathbb{R})$ ouvert de $M_n(\mathbb{R})$
- ii) $M_n(\mathbb{R})$ dense dans $M_n(\mathbb{R})$
- iii) $M_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc de $M_n(\mathbb{R})$

2) Topologie de $O(n)$

- i) $M_n(\mathbb{R})$ fermé de $M_n(\mathbb{R})$
- ii) $M_n(\mathbb{R})$ borné dans $M_n(\mathbb{R})$
- iii) En deduire que $O(n)$ compact de $M_n(\mathbb{R})$

(1)

3) Topologie de $S_n^{++}(\mathbb{R})$, $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$

i) a) Mq $S_n^{++}(\mathbb{R})$ dense $S_n^+(\mathbb{R})$

Indic : pour tout $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, considérer

b) En déduire $S_n^{++}(\mathbb{R})$ fermé, la suite $A_k = A + \frac{1}{k} I$ ou $k \in \mathbb{N}^*$

ii) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})^c \iff A \notin S_n^{++}(\mathbb{R})$

Mq $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $X \neq 0$ et $\|X\|=1$

avec ${}^tX \cdot A \cdot X \leq 0$

iii) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite à valeurs dans $S_n^{++}(\mathbb{R})^c$

on suppose (A_k) coge vers $A \in M_n(\mathbb{R})$

a) Dire pourquoi $A_k \in S_n(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

b) Mq $S_n(\mathbb{R})$ est fermé

c) En déduire que $A \in S_n(\mathbb{R})$

d) Dire pourquoi il existe une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $X_k \neq 0$, $\|X_k\|=1$

et ${}^tX_k \cdot A \cdot X_k \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

e) Mq $S(0,1) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } \|X\|=1\}$ compact de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

En déduire que $\exists (X_{p(k)})$ sous suite de (X_k) qui coge vers $X \in S(0,1)$

f) Justifier que $\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^tX_{p(k)} \cdot A \cdot X_{p(k)} = {}^tX \cdot A$

g) En déduire que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})^c$

h) " " $S_n^{++}(\mathbb{R})^c$ ~~ouvert~~ fermé
 puis que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ouvert

(2)

4) Propriétés algébriques de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$

- i) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Mg $\text{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$
- ii) En deduire que $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$
- iii) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Mg $\text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$

Partie II / Racine carrée d'une matrice

Dans cette partie on fixe $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

- 1) Dire pour qu'il $\exists P \in \text{O}(n)$, $\exists D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
tq $\lambda_i > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$

avec $A = P D P^{-1}$

- 2) on pose $B = P \Delta P^{-1}$ tq $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

- i) Mg $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

- ii) Vérifier que $B^2 = A$

*B s'appelle une
racine carrée
de A dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$*

- 3) on suppose ici $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$

- i) Mg l'app $\mu: \mathbb{R}_{n-1}(X) \rightarrow \mathbb{R}^n$ isom
 $Q(X) \mapsto (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$

- ii) En deduire que $\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$ tq $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$
 $\forall 1 \leq i \leq n$

- iii) " " " $\Delta = Q(D)$

- iv) " " " $P = Q(A)$

- 4) Mg le résultat de II.3. iv) est encore
valable même si $\exists i \neq j$ tq $\lambda_i = \lambda_j$

(3)

5) Soit C une autre racine carrée de A
dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

car $C \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $C^2 = A$

i) Vérifier que $AC = CA$

ii) En déduire que $BC = CB$

iii) Vérifier que $(B+C)(B-C) = 0$

iv) " " $B+C \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

v) En déduire que $B+C \in GL_n(\mathbb{R})$

vi) Conclure que $B=C$

Ainsi $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ admet dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ une seule
~~et~~ unique racine carrée $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
qu'on notera $\sqrt{A}$

6) Soit $f: S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$
 $A \mapsto \sqrt{A}$

i) Montrer que f est bien définie

ii) Soit $A_k = P_k D_k P_k^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers A
ou $P_k \in O(n)$

a) Dire pourquoi $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et D_k diagonale

b) " " $\exists (P_k) qui converge vers $P \in O(n)$$

c) " " $P_k^{-1} \rightarrow P^{-1}$

d) En déduire $D_k \rightarrow D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

e) En déduire $A = P D P^{-1}$ tq $\lambda_i \geq 0$

f) " " f est continue

Partie III / Décomposition plane

on fixe dans cette partie ~~$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$~~
 $A \in GL_n(\mathbb{R})$

1) Mq ${}^t A \cdot A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

2) On pose $S = \sqrt{{}^t A \cdot A} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\underline{\text{q}} S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
et $O = A \cdot S^{-1}$ et $S^2 = {}^t A \cdot A$

i) Mq $O \in O(n)$

ii) Mq $A = OS$ (Décomposition plane)
existence

3) On suppose que $A = O' S'$ tq $O' \in O(n)$
 $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

i) Vérifier que $(S')^2 = {}^t A \cdot A$

ii) En deduire que $S = S'$ puis que $O = O'$
(unicité de la décomposition plane)

4) on pose $f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$
 $A \mapsto (O, S)$

i) Mq f est bien définie et bijective

ii) Mq f est continue. Indic utiliser $O(n)$ compact

iii) Mq f^{-1} est continue

5) Mq la décomposition plane existe aussi pour
 $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ mais n'est pas unique

Indic : utiliser I.3.i.a

I.2.iii

III.2.ii

FIN
(5)