

Séries Entières

e3a 2015

Partie I .

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et possiblement infini tel que $a_0 = 1$. On se propose de démontrer qu'il existe un nombre réel R' tel que $0 < R' \leq R$ et $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R' telle que :

$$\forall z \in D(0, R'), S(z)T(z) = 1.$$

Soit ρ un nombre réel tel que $0 < \rho < R$.

1. Rappeler la définition précise du rayon de convergence de la série entière S .
2. Justifier que la suite $(|a_n \rho^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
3. En déduire qu'il existe un nombre réel $K > 0$ tel que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$|a_n| \leq \left(\frac{K}{\rho}\right)^n.$$

On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$b_0 = 1 \text{ et pour } n > 0, b_n = -\left(\sum_{j=1}^n a_j b_{n-j}\right).$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$|b_n| \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n.$$

5. En déduire que la série

$$T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

a un rayon de convergence > 0 .

6. Soit R' le minimum des rayons de convergence des séries S et T . Expliciter les coefficients de la série produit $S(z)T(z)$, pour z dans $D(0, R')$.
7. Conclure.

Partie IIA.

Soit f la fonction définie sur la première page.

1. Justifier précisément que la fonction f , restreinte à $\mathbb{R}$, est continue en 0.
2. Soit z un nombre complexe. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $e^z - 1$ en fonction de x et de y .
3. Déterminer l'ensemble des éléments z de $\mathbb{C}$ tels que $f(z) = 0$.
4. Justifier qu'il existe une fonction g définie sur le disque $D(0, 2\pi)$ définie par :

$$\forall z \in D(0, 2\pi), g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

5. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle. Quel en est le rayon de convergence ?
(b) En déduire que la fonction f admet un développement en série entière sur $\mathbb{C}$: on montrera qu'il existe une série entière $U(z)$ de rayon de convergence infini telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, U(z) = f(z).$$

Expliciter les coefficients de la série entière U .

6. En utilisant les résultats de la partie I, justifier qu'il existe une série entière $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et un nombre réel R dans $]0, 2\pi[$ telle que le rayon de convergence de $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ est supérieur ou égal à R et telle que

$$\forall z \in D(0, R), V(z) = g(z).$$

7. (a) Démontrer que la fonction G définie par

$$\forall t \in]-2\pi, 2\pi[, G(t) = t + 2g(t),$$

est une fonction paire.

- (b) Que peut-on en déduire pour les coefficients de la série $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$?

Dans toute la suite du problème, on note $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par :

$$\forall z \in D(0, R), g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n.$$

On admet qu'on peut prendre $R = 2\pi$.

Partie II B.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , γ_n est un nombre réel.
2. Expliciter $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.
3. Justifier les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!} = 0.$$

4. Justifier que, pour tout entier naturel n , γ_n est un nombre rationnel.
5. Que peut-on dire de γ_n , lorsque n est un entier naturel impair ≥ 3 ?

Partie III.

Pour tout entier naturel n , on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui envoie t sur $(1 - e^t)$.

1. Expliciter un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, centré en 0, tel que

$$\forall t \in I, |e^t - 1| < 1.$$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels telle que la série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon de convergence au moins 1.

On se propose de démontrer que la série de fonctions $S_h = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

2. Soit $t \in I$. Démontrer que la série $S_h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n(t)$ est convergente.
3. (a) Soit K un segment non réduit à un point contenu dans I . Justifier qu'il existe un nombre réel > 0 , qu'on note C_K , tel que

$$\forall t \in K, |e^t| \leq C_K.$$

- (b) En déduire que S_h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que

$$\forall t \in I, S'_h(t) = -e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} h^n(t).$$

On citera précisément le théorème utilisé.

- (c) Justifier qu'il existe une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ de rayon de convergence au moins 1 telle que

$$\forall t \in I, S'_h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n h^n(t).$$

4. Démontrer que S_h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I : On pourra démontrer par récurrence sur l'entier naturel $k \geq 1$ que S_h est de classe $\mathcal{C}^k$ et qu'il existe une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} z^n$ de rayon de convergence au moins 1 telle que $(S_h)^{(k)}$, la dérivée k -ième de S_h , vérifie

$$\forall t \in I, (S_h)^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} h^n(t).$$

Partie IV.

On conserve les notations de la partie III, en particulier la fonction h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 1 - e^t$ et I est l'intervalle ouvert défini dans la question III1.

- Démontrer que pour tout $t \in I$, $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^t)^k}{k+1}$. On justifiera la convergence de cette série de fonctions.
- Enoncer précisément la formule de Leibniz.
 - Démontrer par récurrence sur l'entier naturel k que pour tout entier naturel n tel que $k > n$, $(h^k)^{(n)}(0) = 0$.
 - Démontrer que pour tous entiers naturels n, k tels que $k > n$, et pour tout H , fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ,

$$(Hh^k)^{(n)}(0) = 0.$$

- En déduire que

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1}.$$

On pourra décomposer $g(t)$, pour $t \in I$, sous la forme

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1}H(t), \text{ avec } H \text{ fonction de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I.$$

- Démontrer que pour tout entier naturel n , et tout entier naturel k non nul,

$$(h^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

- Quelle expression de γ_n peut-on en déduire, pour tout entier naturel n ?

E3A 2015 – MP – Maths 2

Corrigé

Partie I.

1. Voir le cours.
2. Puisque $\rho \in D(0, R)$, la série $\sum a_n \rho^n$ converge ; son terme général tend donc vers 0, donc est borné, d'où le résultat.
3. Soit M vérifiant $|a_n \rho^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $M \leq 1$, alors $M \leq 1^n$ pour tout n ; sinon, $M \leq M^n$ pour tout n . En prenant $K = \max\{1, M\}$, on a donc bien $|a_n| \leq (K/\rho)^n$ pour tout n .
4. On raisonne par récurrence sur n . Le résultat est clair pour $n = 0$; supposons le vrai jusqu'à un rang $n - 1 \geq 0$. Alors, au rang n , $|b_n| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| |b_{n-j}|$ et $0 \leq n - j \leq n - 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$|b_n| \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{K}{\rho}\right)^j \left(\frac{2K}{\rho}\right)^{n-j} = \left(\frac{K}{\rho}\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \left(\frac{K}{\rho}\right)^n \frac{2^n - 1}{2 - 1} \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n$$

où l'on a entre autres posé $i = n - j$ à la deuxième étape ; cela achève la récurrence.

5. Posons $r = \frac{\rho}{2K}$. Alors, $r > 0$ et, pour tout $t \in]0, r[$, $|b_n t^n| \leq \left(\frac{t}{r}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On sait qu'alors le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n t^n$ est au moins égal à r , donc est strictement positif.
6. Question étrangement formulée. En termes de séries entières, on sait que, pour tout $z \in D(0, R')$, le nombre $S(z)T(z)$ est la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, où, pour tout n , $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$. On a donc $c_0 = a_0 b_0 = 1$; et, pour tout $n \geq 1$, $c_n = b_n + \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j} = 0$ par définition de (b_n) .
7. On a donc $S(z)T(z) = 1$ pour tout $z \in D(0, R')$, ce qui établit le résultat annoncé.

Partie IIA.

1. Les théorèmes usuels montrent que la restriction de f à $\mathbb{R}$ est continue en chaque point des ouverts $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

En 0, on utilise le DL₁ de e^x : au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + o(x)$ et donc $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + o(1)$ pour x non nul. La restriction de f à $\mathbb{R}$ a donc bien pour limite 1 = $f(0)$ en 0.

2. On a $e^z = e^x e^{iy}$ d'où $\operatorname{Re}(e^z - 1) = e^x \cos y - 1$ et $\operatorname{Im}(e^z - 1) = e^x \sin y$.
3. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$. La question 2. donne $e^x \sin y = 0$, d'où l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = k\pi$; puis $e^x \cos y = (-1)^k e^x = 1$, d'où $x = 0$ et k pair. Enfin, $f(0) = 1$, le couple $(x, y) = (0, 0)$ n'est donc pas solution.

Inversement, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $e^{2in\pi} = 1$; l'ensemble des solutions est donc $\{2in\pi ; n \in \mathbb{Z}^*\}$.

Remarque : la forme module-argument paraît plus adaptée pour résoudre l'équation.

4. Soit $z \in D(0, 2\pi)$; alors, $|z| < 2\pi$ et donc, d'après la question précédente, $f(z) \neq 0$; la fonction g est donc bien définie sur $D(0, 2\pi)$.

5. (a) On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$, le rayon de convergence étant infini (par exemple parce que $z^k/k!$ tend vers 0 pour tout z).

(b) Pour tout $z \neq 0$, on a donc $f(z) = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}$ en posant $j = k - 1$.

Puisque $f(0) = 1$, l'égalité est encore vraie en 0.

6. La série entière $U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ a un rayon de convergence non nul, et $u_0 = 1$; la partie I. garantit qu'il existe $R > 0$ tel que $1/U(z) = g(z)$ soit défini et somme d'une série entière $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur $D(0, R)$.
7. (a) Pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, $G(t) - G(-t) = 2t + \frac{2t}{e^t - 1} - \frac{2t}{e^{-t} - 1} = 2t \left(\frac{(e^t - 1) + 1 - e^t}{e^t - 1} \right) = 0$ d'où le résultat.
- (b) Par combinaison linéaire, G est développable en série entière sur $] - R, R[$, et les coefficients de rang impair de son développement sont tous nuls.
Pour $t \in] - R, R[$, on a $G(t) = t + 2V(t) = 1 + (1 + 2b_1)t + \sum_{k=2}^{+\infty} 2b_k t^k$; on a donc $b_1 = -1/2$, et $b_k = 0$ pour tout $k \geq 3$ impair.

Partie IIB.

1. La restriction de g à $] - 2\pi, 2\pi[$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = g^{(n)}(0)/n!$ est réel.
2. On sait déjà que $\gamma_1 = 1$, $\gamma_1 = -1/2$ et $\gamma_3 = 0$. Pour calculer γ_2 , on peut par exemple effectuer un DL₂ de g : au voisinage de 0,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{t + t^2/2 + t^3/6 + o(t^3)} = \frac{1}{1 + t/2 + t^2/6 + o(t^2)} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + o(t^2)$$

et donc $\gamma_2 = 1/12$.

3. On sait que, pour tout z , $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$. D'après la partie I., si l'on pose $b_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $b_n = -\sum_{j=1}^n \frac{b_{n-j}}{(j+1)!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k+1)!}$, alors la série entière $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon de convergence R non nul, et, au voisinage de 0, $T(z) = 1/f(z) = g(z)$.
Par unicité du développement en série entière, on a donc $b_n = \gamma_n$ pour tout n ; en particulier, pour tout $n \geq 1$, $\gamma_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!}$, ce qui fournit la relation demandée.

Remarque : il est peut-être plus simple d'écrire que la série entière produit de celle de f par celle de g est la série entière de la constante 1.

4. On a $\gamma_0 = 1 \in \mathbb{Q}$; et, si $\gamma_k \in \mathbb{Q}$ jusqu'au rang $n-1$, alors la relation $\gamma_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!}$ montre que $\gamma_n \in \mathbb{Q}$; par récurrence, les coefficients γ_n sont donc tous rationnels.
5. Vu en IIA.7.(b) : $\gamma_n = 0$ pour $n \geq 3$ impair.

Partie III.

1. Pour tout $t < \ln 2$, on a $0 < e^t < 2$ donc $e^t - 1 \in]-1, 1[$; on peut donc prendre $I =] - \ln 2, \ln 2[$.

Remarque : puisque le rayon de convergence de la série $S(z)$ est au moins 1, la fonction S est de classe C^∞ sur $] - 1, 1[$; et h est de classe C^∞ sur I , et $h(I) \subset] - 1, 1[$. La fonction S_h , qui est en fait la composée $S \circ h$, est donc de classe C^∞ sur I . Le reste de la partie III. est donc superflu. . .

2. La série $\sum a_n u^n$ converge au moins pour $u \in] - 1, 1[$, et $h(t) \in] - 1, 1[$ par hypothèse; donc $\sum a_n h(t)^n$ converge.
3. (a) La fonction exponentielle est continue sur le segment K , donc y est bornée; on peut toujours choisir un majorant de sa valeur absolue (?) qui soit strictement positif.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction $t \mapsto a_n h(t)^n$. La fonction h est de classe C^1 sur I , de dérivée $t \mapsto -e^t$; donc, pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur I , de dérivée $-na_n h(t)^{n-1} e^t$.

Soit K un segment inclus dans I . La fonction h est alors bornée et atteint ses bornes sur K ; si D_K est la borne supérieure de $|h|$ sur K , on a donc $D_K < 1$ (borne atteinte et $|h(t)| < 1$ sur I).

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in K \quad |f'_n(t)| \leq C_K n a_n (D_K)^{n-1}$. On sait que la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$; puisque ce rayon est au moins 1, la série $C_K n a_n (D_K)^{n-1}$ converge.

Par suite, la série $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément sur K ; puisque la série $\sum f_n$ y converge simplement, on sait que sa somme, S_h , est de classe C^1 sur I , de dérivée $\sum_{n \geq 1} f'_n$. Cela étant vrai pour tout segment $K \subset I$, la fonction S_h est finalement de classe C^1 sur I .

- (c) Considérons la fonction $\Phi : z \mapsto (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. Comme vu plus haut, la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, donc au moins égal à 1; et $z-1$ est un polynôme, cas particulier de série entière de rayon de convergence infini. Le produit des deux est donc la somme d'une série entière $\sum u_n z^n$ de rayon de convergence au moins égal à 1.

D'autre part, on a vu en (b) que, pour $t \in I$, $\Phi(h(t)) = S'_h(t)$, ce qui achève la démonstration.

4. L'indication étant optionnelle, je m'en dispense. Supposons établi que S_h est de classe C^k sur I , ce que l'on a déjà fait pour $k=1$.

La série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, donc vérifie les mêmes hypothèses que la série $\sum a_n z^n$. On peut donc aussi conclure que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} h^n$ est de classe C^k sur I . La question 3.(b) montre alors que S'_h est elle aussi de classe C^k sur I , et donc S_h y est de classe C^{k+1} .

Par récurrence, la fonction S_h est donc de classe C^k pour tout k , donc de classe C^∞ sur I .

Partie IV.

1. On sait que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Soit $t \in I \setminus \{0\}$. Par définition de I , on a $1 - e^t \in]-1, 1[$; par suite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+1} = \frac{1}{1-e^t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^{k+1}}{k+1} = \frac{\ln e^t}{1-e^t} = \frac{1}{f(t)} = g(t)$$

La relation est trivialement vérifiée pour $t=0$.

2. (a) Voir le cours.

- (b) Pour $k=0$, il n'existe pas d'entier naturel n tel que $n < k$, la phrase est donc vraie. Pour $k=1$, le seul n à examiner est 0, et on a effectivement $(h^1)^{(0)}(0) = h(0) = 0$.

Supposons le résultat établi à un rang k . Soit alors $n < k+1$; en écrivant $h^{k+1} = h^k \times h$, la formule de Leibniz donne

$$(h^{k+1})^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (h^k)^{(j)}(0) h^{(n-j)}(0)$$

Pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $j \leq n-1 < k$, et donc $(h^k)^{(j)}(0) = 0$ par hypothèse de récurrence; pour $j=n$, c'est le terme $h^{(n-j)}(0) = h(0)$ qui est nul; tous les termes de la somme sont donc nuls, ce qui achève la récurrence.

- (c) Soient $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < k$ et H une fonction de classe C^∞ sur I . Alors

$$(Hh^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (h^k)^{(j)}(0) H^{(n-j)}(0)$$

Pour tout $j \leq n$, on a $(h^k)^{(j)}(0) = 0$ d'après (b), puisque $j \leq n < k$; on a donc bien $(Hh^k)^{(n)}(0) = 0$.

(d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$; on peut alors écrire

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{h(t)^{k-(n+1)}}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h(t)^j}{j+n+2}$$

On vérifie aisément que la série entière $\sum \frac{z^j}{j+n+2}$ a un rayon de convergence égal à 1. En appliquant les résultats de la partie III. à cette série, on voit que la fonction $H : t \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h(t)^j}{j+n+2}$ est de classe C^∞ sur I .

On peut donc appliquer le résultat de la question (c) : puisque $n < n+1$, la dérivée n -ème de $h^{n+1}H$ s'annule en 0. Puisque, pour tout $t \in I$, $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1}H(t)$, on en déduit immédiatement le résultat demandé.

3. (a) Soit $t \in I$. Alors $h^k(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} e^{jt}$. Pour $n \geq 1$, le terme d'indice 0, constant, disparaît par dérivation, donc $(h^k)^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n e^{jt}$. Il ne reste qu'à prendre $t = 0$ pour obtenir la relation demandée.
- (b) Soit $n \geq 1$. On sait que $\gamma_n = g^{(n)}(0)/n!$. En tenant compte du fait que le terme d'indice 0 est nul dans l'expression de $g^{(n)}(0)$ trouvée en 2.(d), la question précédente donne donc

$$\gamma_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{k+1} \binom{k}{j} j^n$$