

Devoir Maison

Calcul Différentiel

Exercice 1 : CNC 2023

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1. Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

1.2. Montrer que la fonction F admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et le déterminer.

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1. Calculer les dérivées partielles secondes de F au point (x_0, y_0) .

2.2. À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction F présente un extremum local au point (x_0, y_0) . Est-ce un minimum ou un maximum local ?

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$. Vérifier que $F(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9$.

3.2. Montrer qu'en fait la fonction F présente un extremum absolu strict au point (x_0, y_0) .

On pourra remarquer que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}.$$

Exercice 2 : e3a 2025

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, par :

$$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(X) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

On cherche les extrema éventuels de la fonction f sous la contrainte : $H = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 2\}$ et les points où ces extrema sont atteints.

Première méthode

1. Déterminer les extrema de la fonction $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.
2. Déterminer les solutions du problème posé.

Deuxième méthode

Soit $g : X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$.

3. En utilisant la fonction g , déterminer les extrema possibles de f restreinte à H .
4. Retrouver les solutions du problème posé.

Troisième méthode

Soit $F = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner la dimension.
6. Déterminer le sous-espace orthogonal du sous-espace F .
7. Calculer la distance $d(Y, F)$ entre Y et le sous-espace vectoriel F .
8. Soit $X \in \mathbb{R}^4$. Justifier que : $X \in H \iff X + Y \in F$.
9. En déduire la structure de l'ensemble H .
10. Retrouver de nouveau les solutions du problème posé.

Corrigé

Exercice 1 : CNC 2023

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1 F est une fonction polynomiale donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 6$$

1.2 (x_0, y_0) est un point critique de F si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 3 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

ce système admet une solution unique $(x_0, y_0) = (0, 3)$, qui est l'unique point critique de F .

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1 On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

2.2 La matrice Hessienne de F au point (x_0, y_0) s'écrit

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 3$ dont les racines sont $\{1, 3\}$.

$H_f(x_0, y_0)$ est symétrique réelle et admet deux valeurs propres strictement positives, elle est donc symétrique définie et positive, par suite (x_0, y_0) est un minimum local.

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$ donc $x = u$ et $y = v + 3$, on remplace dans F

$$\begin{aligned} F(x, y) &= u^2 + u(v + 3) + (v + 3)^2 - 3u - 6(v + 3) \\ &= u^2 + uv + 3u + v^2 + 6v + 9 - 3u - 6v - 18 \\ &= u^2 + uv + v^2 - 9 \end{aligned}$$

3.2 On a $F(x_0, y_0) = -9$ donc

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x_0, y_0) &= u^2 + uv + v^2 \\ &= \left(u^2 + 2u \frac{v}{2} + \frac{v^2}{4}\right) + \frac{3v^2}{4} \\ &= \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} \end{aligned}$$

par suite $F(x, y) - F(x_0, y_0) \geq 0$ pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, cette inégalité est stricte si $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ donc F présente un minimum absolu strict au point (x_0, y_0) .

Exercice 2 : e3a 2025

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, par :

$$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(X) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

On cherche les extrema éventuels de la fonction f sous la contrainte : $H = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 2\}$ et les points où ces extrema sont atteints.

Première méthode

1. Déterminer les extrema de la fonction $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.

Solution: h est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale. Pour $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, on a $\nabla h(u, v, w) = (4u - 4, 2v, 2w)$.

Ainsi, h a unique point critique : $(1, 0, 0)$. Comme h est définie sur $\mathbb{R}^3$ qui est ouvert, c'est le seul point le lequel h peut admettre un extremum local.

De plus, $h(u, v, w) = 2(u - 1)^2 + v^2 + w^2 + 2 \geq 2$ et ainsi, $h(u, v, w) \geq h(1, 0, 0)$.

On a donc montré que h admet en $(1, 0, 0)$ un minimum global. h n'a pas d'autre extremum (local ou global) puisque n'a pas d'autre point critique.

2. Déterminer les solutions du problème posé.

Solution: Soit $(x, y, z, t) \in H$. On a alors $x = 2 - y$ et ainsi $f(x, y, z, t) = (2 - y)^2 + y^2 + z^2 + t^2 = h(y, z, t)$.

On conclut que sous la contrainte H , f admet un minimum global en $(1, 1, 0, 0)$ qui vaut $f(1, 1, 0, 0) = 2$ et n'admet pas de maximum global.

Deuxième méthode

Soit $g : X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$.

3. En utilisant la fonction g , déterminer les extrema possibles de f restreinte à H .

Solution: On applique la propriété d'optimisation sous contrainte ce qu'on peut bien faire puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^4$.

De plus, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $\nabla g(x, y, z, t) = (1, 1, 0, 0) \neq 0$ et $\nabla f(x, y, z, t) = (2x, 2y, 2z, 2t)$.

Soit $\omega = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que $f|_H$ admet en ω un extremum. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(\omega) = \lambda \nabla g(\omega)$. Ainsi, $2a = \lambda$, $2b = \lambda$, $c = 0$ et $d = 0$.

On a donc $\omega = (\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 0, 0)$. Comme $\omega \in H$, cela donne $\lambda = 2$ et finalement, $\omega = (1, 1, 0, 0)$.

Dans la question suivante, on vérifie qu'en ce point, $f|_H$ admet bien un extremum.

4. Retrouver les solutions du problème posé.

Solution: On peut reprendre le raisonnement de la question 2.

Troisième méthode

Soit $F = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner la dimension.

Solution: Soit $\phi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y$.

ϕ est linéaire car : soit $(x, y, z, t, x', y', z', t') \in \mathbb{R}^8$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t')) &= \phi(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t') \\ &= \lambda x + x' + \lambda y + y' \\ &= \lambda(x + y) + x' + y' \\ &= \lambda\phi(x, y, z, t) + \phi(x', y', z', t') \end{aligned}$$

On a $F = \ker \phi$: F est donc un sev de $\mathbb{R}^4$ et comme ϕ est une forme linéaire non nulle, sa dimension est 3.

6. Déterminer le sous-espace orthogonal du sous-espace F .

Solution: On peut supposer ici qu'il s'agit de travailler avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$. On le notera $(\cdot|\cdot)$.

On a $F = \{X \in \mathbb{R}^4, (X|Y) = 0\}$. Ainsi, $\text{Vect}(Y) \subset F^\perp$. Mais, par théorème du supplémentaire orthogonal, $\dim F^\perp = 1$, donc finalement, par égalité des dimensions, $F = \text{Vect}(Y)^\perp$.

7. Calculer la distance $d(Y, F)$ entre Y et le sous-espace vectoriel F .

Solution: Par propriété du cours, en notant p_F la projection orthogonale sur F , on a $d(Y, F) = \|Y - p_F(Y)\| = \|Y\|$ puisque $Y \in F^\perp$.

Finalement, $d(Y, F) = \sqrt{2}$.

8. Soit $X \in \mathbb{R}^4$. Justifier que : $X \in H \iff X + Y \in F$.

Solution: On note $X = (x, y, z, t)$.

On remarque juste qu'on a $X \in H$ ssi $(x - 1) + (y - 1) = 0$ ce qui est bien équivalent à $X + Y \in F$.

9. En déduire la structure de l'ensemble H .

Solution: H est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^4$ de direction F .

10. Retrouver de nouveau les solutions du problème posé.

Solution: On a pour tout $X \in \mathbb{R}^4$, $f(X) = \|X\|^2$.

On cherche les éventuels max/min de $\Gamma = \{\|X\|^2, X \in H\}$.

H est un sous-espace affine non réduit à un point donc n'est pas borné: ainsi, Γ n'est pas majoré et f_H n'admet pas de maximum.

D'autre part, comme $\|X\| = \|X + Y - Y\|$ et que lorsque X parcourt H , $X + Y$ parcourt F , on a aussi $\Gamma = \{\|f - Y\|^2, f \in F\}$.

Enfin, par le cours, on sait que Γ admet un minimum qui est $d(Y, F)^2$ et qui vaut donc 2. On sait aussi par le cours que ce minimum n'est atteint qu'en un seul point qui est le projeté orthogonal de Y sur F c'est-à-dire en $f = (0, 0, 0, 0)$ et $X = -Y$. Cela montre que f_H admet un minimum local, que celui-ci vaut 2 et qu'il est atteint uniquement en $(1, 1, 0, 0)$.