Lundi 2 Janvier 2017

# Fonctions Réelles

## Limites-Continuité-Dérivabilité

**Vocabulaire.** Dans tout le résumé de cours I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

**Continuité globale : théorèmes fondamentaux.** On dit qu'une fonction est continue sur I *si et seulement si* elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I se note $\mathcal{C}(\mathrm{I})$.

**Remarque :**
. La somme, le produit et la composé de fonctions continues sur I est aussi continue sur I.

**Théorème :**
. L'image d'un intervalle par toute fonction continue est un intervalle.

**Conséquences (très pratiques).**

- Si $f$ continue sur I, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tel que $a < b$ et $y$ une valeur intermédiaire stricte entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = y$.
  Ce résultat est connu sous le nom du *théorème des valeurs intermédiaires* (TVI)
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue avec $f(a) \leqslant f(b)$ (par exemple), alors $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ est surjective.
- Si $f$ continue sur I, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tel que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
  Ce résultat, malgré que c'est un cas particulier du TVI, est très utilisé pour justifier l'existence des solutions d'une équation de type $f(x) = 0$, plus encore l'approcher à l'aide du principe de dichotomie.
- On sait que toute fonction strictement monotone est injective.
  Inversement, toute fonction strictement monotone continue et injective.
  En particulier, si $f : [a, b] \to [c, d]$ est strictement monotone et continue, alors $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ est continue.

**Théorème :**
. L'image d'un segment par toute fonction continue est un segment.

**Conséquence (très pratique).** Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

**Dérivabilité globale, théorèmes fondamentaux :**

**Théorème :**
. *Théorème de Rolle*
Si $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f'(c) = 0$$

**Interprétation.** Toute fonction continue sur un segment, dérivable sur l'intervalle ouvert et non injective, admet au moins une tangente horizontale.

**Théorème :**

. *Théorème des accroissements finis,* (T.A.F)

Si $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors :

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

**Interprétation.** Toute corde d'une fonction continue sur un segment, dérivable sur l'intervalle ouvert, admet au moins une tangente qui lui est parallèle.

**Théorème :**

. *Inégalité des accroissements finis,* (I.A.F)

Si $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que $m \leqslant f' \leqslant M$ alors

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

**Théorème :**

. *Inégalité de Taylor Lagrange.*

Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ tel que $|f^{(n)}| \leqslant M$ sur $]a, b[$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{(b-a)^n}{n!}$$

**Théorème :**

. *Prolongement de classe* $\mathcal{C}^1$.

Si $f$ est dérivable sur $]a, b[$ et si $\lim\limits_{b} f'$ existe et soit finie, alors $f$ est dérivable sur $]a, b]$.

Si de plus $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, alors elle l'est aussi sur $[a, b]$.

**Conséquences (très pratiques).**

- Si $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que $f' = 0$ alors $f$ est constante sur $[a, b]$.
- Si $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que $f' \geqslant 0$ alors $f$ est croissante sur $[a, b]$.
- Si $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que $f' > 0$ alors $f$ est strictement croissante sur $[a, b]$.
- Si $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que $f' > 0$, sauf peut être en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement croissante sur $[a, b]$.

FIN