

Séries Numériques

■ ■ ■ Généralités

Définition : Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $n \in \mathbf{N}$. On appelle **somme partielle** de rang n , et on note U_n , la somme $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

La suite des sommes partielles $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est appelée la **série de terme général** u_n . On la note $\sum u_n$.

Définition : La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite des sommes partielles (U_n) l'est. En ce cas, la limite des sommes partielles est appelée la **somme** de la série : on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

Lorsque la suite (U_n) diverge, on dit que la série est **divergente**.

Théorème-Définition*. — **Restes d'une série convergente** —. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Étant donné $p \in \mathbf{N}$ le **reste d'ordre** p de la série $\sum u_n$ est défini par $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ de sorte que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U_p + R_p$. De plus, la suite $(R_p)_{p \in \mathbf{N}}$ est convergente de limite nulle.

Théorème*. — Soit $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel.

- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ converge, alors $\lambda \sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Théorème. — **Condition nécessaire de convergence** —. Soit $\sum u_n$ une série numérique.

Si $\sum u_n$ converge alors (u_n) est convergente de limite nulle

Vocabulaire : lorsque $u_n \not\rightarrow 0$, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

■ ■ ■ Séries à termes positifs

Théorème. — **Condition nécessaire et suffisante de convergence** —. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note (U_n) la suite des sommes partielles. Alors

$\sum u_n$ est convergente si et seulement si (U_n) est majorée.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_n U_n$.

Lemme. — Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

Savoir-faire : interpréter et illustrer cet encadrement comme aire de régions du plan

Théorème.— Comparaison série-intégrale —. Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors

La série $\sum f(n)$ converge *si et seulement si* la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge

Théorème.— Comparaison des séries à termes positifs —. Soit u, v des suites positives.

On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.

- si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
- si la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Théorème.— Règles des équivalents —. Soit u, v des suites positives telles que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$.

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, ie. $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $\sum v_n$ converge.

■■■ Séries absolument convergentes

Définition : Soit $\sum u_n$ une série. On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème.— Condition suffisante de convergence —. Soit $\sum u_n$ une série numérique.

Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente

Remarque : dans ce cas, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

■■■ Séries de référence

Théorème.— Convergence des séries géométriques —. Soit $x \in \mathbf{R}$.

La série géométrique $\sum x^n$ est convergente *si et seulement si* $|x| < 1$

En ce cas, elle est absolument convergente.

Corollaire.— Séries géométriques et dérivées —. Soit $x \in]-1, 1[$.

- la série $\sum x^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- la série $\sum nx^{n-1}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ est convergente et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Théorème.— Convergence des séries de Riemann —. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un réel donné.

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1$

Corollaire*.— Comparaison à une série de Riemann : règle $n^\alpha u_n$ —. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- ▶ S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors $\sum u_n$ converge.
- ▶ S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in \mathbf{R}^{+*}$, alors $\sum u_n$ converge.
- ▶ S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in \mathbf{R}^{+*}$, alors $\sum u_n$ diverge.
- ▶ S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.