Lundi 8 Janvier 2018

Développements Limités

Niveau 3-4

Blague du jour

Trois amis scientifique (biologiste, physicien et mathématicien) sont attablés à la terrasse d'un café, lorsque ils voient deux personnes entrer dans une maison en face. Quelques instants plus tard, trois personnes en sortent. Conclusion de chacun des scientifiques :

- **Le biologiste** : *Oh ! Ils se sont reproduits !*
- **Le physicien** : *Il y a erreur expérimentale...*
- **Le mathématicien** : *Si une personne entre dans la maison, elle sera vide.*

Brook Taylor (1685-1731)

Homme de sciences anglais. Il s'intéressa aux mathématiques, à la musique, la peinture et la philosophie. En 1712, il fit partie d'un comité pour départager Isaac Newton et Leibniz. De 1714-1718 Taylor fut élu secrétaire de la Royal Society, c'est la période la plus productive de sa vie. C'est lui qui inventa l'intégration par partie. L'importance du théorème de Taylor ne fut pas perçue avant 1772 quand Lagrange proclama que c'était le principe de base du calcul différentiel

Exercice 1

Donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que sa position par rapport à la courbe de la fonction : $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$

Exercice 2

Calculer le développement limité de $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 3

Déterminer les asymptotes (ainsi que leurs positions) en $+\infty$ et $-\infty$ de :

$$f(x) = x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2})$$

Exercice 4

Calculer les limites éventuelles suivantes :

i) $\lim\limits_{0}\left(\dfrac{2(\cosh x-1)\sinh x-x^3\sqrt[4]{1+x^4}}{\sinh^5(x)-x^5}\right)$ ii) $\lim\limits_{+\infty}\left(x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)\right)$

iii) $\lim\limits_{+\infty}\left(\cosh(\sqrt{x^2+1})-\cosh(\sqrt{x^2-1})\right)$ iv) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(x)e^{\frac{1}{1-\sin(x)}}\right)$

v) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}\left(\tan(x)\left(1-\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right)$ vi) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}\left(\left(1-\dfrac{2x}{\pi}\right)\tan(x)\right)$

Exercice 5

Étudier les branches infinies en $+\infty$ ainsi que leurs position par rapport à la courbe des fonctions définies par : $f(x)=e^{\frac{-1}{x}}\left(\dfrac{x^2-x+2}{x+1}\right)$; $g(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x^3}{x-1}\right)$

Exercice 6

Déterminer la partie principale en 0 quand elle existe des expressions suivantes :

$$\cos(x)^{\sin(x)}\ ;\ \frac{1}{\tan^2(x)}-\frac{1}{x^2}$$

Exercice 7

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes :
$n\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)$; $n^2\left(\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln(n)\right)$.

Exercice 8

Donner un $DAS_n(+\infty)$ de $f(x)$ si :

1. $n=2, f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}$.
2. $n=3, f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$.

Exercice 9

Soit $f:\begin{array}{ccc}[0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^{1+\frac{1}{x}}\end{array}$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité f en 0 .
2. Étudier les branches infinies en $+\infty$.
3. Donner un $DL_3(1)$; en déduire l'équation de la tangente en 1 ainsi que sa position par rapport à la courbe .
4. Dessiner la courbe

Exercice 10

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)^{\sinh(x)} - \sinh(x)^{\sin(x)}}{\tan(x)^{\text{th}(x)} - \text{th}(x)^{\tan(x)}}$

Exercice 11

Soit : $\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}\dfrac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Montrer que f est monotone sur chacun des intervalles $]0,1[$, $]1,+\infty[$.
3. Montrer que pour $x \neq 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{2x}$.
4. Calculer $\lim\limits_{1} f'(x)$, en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
5. Dessiner la courbe.

Exercice 12

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijective telle que $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$, avec $a_1 \neq 0$. Démontrer que f^{-1} admet un développement limité en 0 à l'ordre n, et que celui à l'ordre deux est : $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{a_1} - \dfrac{a_2}{a_1^3}y^2 + o(y^2)$.

Exercice 13

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$.

Exercice 14

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 \text{ Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

1. Étudier les branches infinies (asymptote, position par rapport à l'asymptote).
2. Étude de f au voisinage de $x = -1$ (limite à gauche, à droite ; existence de demi-tangentes, position locale de la courbe par rapport aux demi-tangentes).

Exercice 15 : Recherche de tangentes.

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente pour $x = 0$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

1. $y = \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x}$. Réponse : $y = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{8}$.
2. $y = \dfrac{1}{\sinh x} - \dfrac{1}{x}$. Réponse : $y = -\dfrac{x}{6} + \dfrac{7x^3}{360}$.
3. $y = \dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}$. Réponse : $y = -\dfrac{x}{6} - \dfrac{17x^3}{360}$.
4. $y = (2e^x - e^{-x})^{1/x}$. Réponse : $y = e^3(1 - 4x + 16x^2)$.

Exercice 16 : Recherche d'asymptotes.

Rechercher si les courbes suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

1. $y = \sqrt{x(x+1)}$. Réponse : $y = x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8x}$.
2. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. Réponse : $y = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x}$.
3. $y = (x^2-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. Réponse : $y = 2x - \dfrac{4}{3x}$.
4. $y = (x+1)\arctan(1+2/x)$. Réponse : $y = \dfrac{\pi x}{4} + \dfrac{\pi}{4} + 1 - \dfrac{1}{3x^2}$.
5. $y = x.\arctan x.e^{1/x}$. Réponse : $y = \dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{\pi}{2} - 1 + \dfrac{\pi/4 - 1}{x}$.
6. $y = e^{2/x}\sqrt{1+x^2}\arctan x$. Réponse : $y = \dfrac{\pi x}{2} + \pi - 1 + \dfrac{5\pi/4 - 2}{x}$.
7. $y = \sqrt{x^2 - x}\exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$. Réponse : $y = x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{8x}$.

Fin